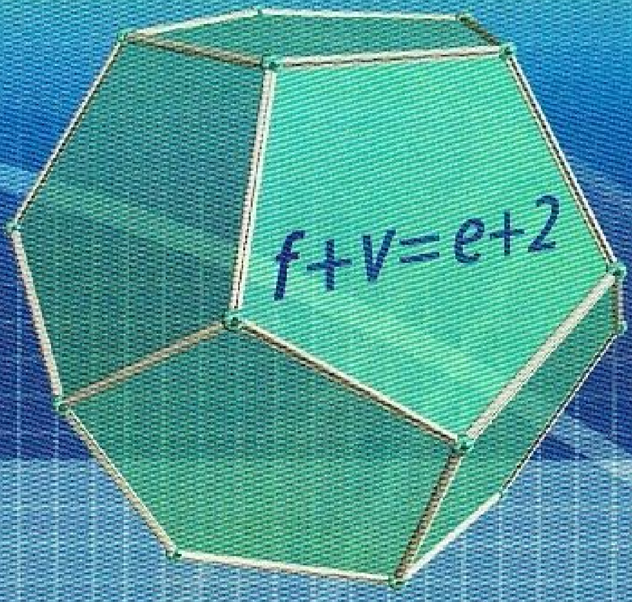
Профессиональное образование

М. И. Башмаков

МАТЕМАТИКА

Задачник

Общеобразовательные дисциплины



$$y=\frac{\sin x}{x}$$

ACADEMA

ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

М. И. БАШМАКОВ

МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧНИК

Рекомендовано
Федеральным государственным автономным учреждением
«Федеральный институт развития образования»
в качестве учебного пособия для использования
в учебном процессе образовательных учреждений,
реализующих программы общего образования
по профессиям начального профессионального образования
и специальностям среднего профессионального образования

Регистрационный номер рецензии 376
от 02 декабря 2011 г. ФГАУ «ФИРО»

5-е издание, стереотипное

ACADEMA

Москва
Издательский центр «Академия»
2014

УДК 51
ББК 22.1
Б336

Рецензент:
преподаватель математики ГОУ СПО «Колледж автоматизации и информационных технологий № 20» *Т. Г. Кононенко*

Башмаков М.И.

Б336 Математика. Задачник : учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования / М. И. Башмаков. — 5-е изд., стер. — М. : Издательский центр «Академия», 2014. — 416 с.

ISBN 978-5-4468-1160-1

Учебное пособие содержит задания по общему курсу математики для изучения дисциплины на базовом уровне независимо от профиля получаемого профессионального образования. Выбор и расположение тем соответствуют учебнику М. И. Башмакова «Математика», который совместно с учебными пособиями «Математика. Сборник задач профильной направленности», «Математика. Книга для преподавателя» того же автора и данным задачником образует учебно-методический комплект.

Задания содержат тренажеры по основным изучаемым алгоритмам, матричные тесты, самостоятельные работы и контрольные тесты с выбором ответа.

Для студентов учреждений среднего профессионального образования.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-4468-1160-1

Уважаемый читатель!

Учебное пособие является частью учебно-методического комплекта по общеобразовательной дисциплине «Математика».

Учебно-методический комплект по математике включает в себя основную и дополнительную литературу, предназначенную для изучения дисциплины в учреждениях среднего профессионального образования.

В состав комплекта входит учебник, задачники для базового и профильного изучения математики, а также методические рекомендации для преподавателей.

В задачниках предложена полноценная система упражнений, достаточная как для аудиторной, так и самостоятельной работы, а также для обобщающего повторения материала и подготовки к ЕГЭ. Кроме того, предлагаемые задачники дают возможность знакомства с прикладными аспектами математических понятий, затрагивающими вопросы финансов, экономики, окружающей среды, применения информационной техники, формирования навыков проектной деятельности по построению математических моделей.

Материалы учебно-методического комплекта соответствуют требованиям Государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования и учитывают профиль получаемого профессионального образования.

Предисловие

Изучая математику по учебнику М. И. Башмакова, рекомендованному для учреждений начального и среднего профессионального образования, вы столкнетесь с необходимостью укрепить и развить свои умения работать с основными математическими понятиями, такими как число, вектор, функция, уравнение, измерение, производная, вероятность и т. п.

На первом этапе работы для этого достаточно тех вопросов и упражнений, которые помещены в учебнике после каждой темы. Однако для закрепления знаний и умений необходима длительная и планомерная тренировка.

В предлагаемом задачнике собран необходимый материал для тренировки по всем темам курса. Этих тем 12 (они соответствуют темам учебника):

1. Развитие понятия о числе;
2. Корни, степени, логарифмы;
3. Прямые и плоскости;
4. Комбинаторика;
5. Координаты и векторы;
6. Основы тригонометрии;
7. Функции и графики;
8. Многогранники;
9. Начала математического анализа;
10. Интеграл и его применение;
11. Элементы теории вероятностей и математической статистики;
12. Уравнения и неравенства.

По каждой теме предложены *тренажеры*, задания в которых разбиты на три уровня сложности — А, Б, В (уровень В — самый сложный). Важную роль играют формулировки отрабатываемых алгоритмов — полезно не только научиться решать предлагаемые задачи, но и держать в памяти, что же надо уметь делать по изученной теме.

Матричные тесты помогут развить способность работы с разными информационными языками — вербальным, образным, символическим и нахождения связей между ними. *Самостоятельные работы* и *контрольные тесты* с выбором ответа дают возможность укрепить и проверить свои умения.

Предлагаемый задачник не ориентирован на специфику определенных профессий и меньше имеет дело с приложениями математики. Его цель — предоставить материал по общему курсу, ориентируясь на требования Государственного стандарта, независимо от получаемой профессии. Использование этого задачника должно сопровождаться (наряду с овладением материала, представленного в учебнике) решением прикладных и профессионально ориентированных заданий. Такого рода задания входят в сборник задач профильной направленности, дополняющий учебно-методический комплект для изучения математики в профессиональных учебных заведениях.

ГЛАВА 1

Развитие понятия о числе

Тренажеры

■ Действия с дробями ■ Разложение натурального числа по степеням простых чисел ■ Делимость, остатки ■ Системы счисления ■ Приближенные вычисления, погрешности ■ Комплексные числа

■ Действия с дробями

1.1. Вычислите значения выражений.

А

1) $\frac{2}{7}+\frac{11}{21}+\frac{321}{49}$; 2) $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{14}{13}$; 3) $\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{5}\right)\cdot 0{,}7:\frac{86}{17}$.

Б

1) $\frac{5}{6}+\frac{7}{33}+\frac{9}{22}$; 2) $\frac{6}{11}:\frac{5}{8}\cdot\frac{9}{40}+0{,}01$; 3) $\left(1-\frac{1}{11}+\frac{1}{121}\right):\left(\frac{8}{20}+\frac{4}{12}\right)$.

В

1) $\left(\frac{2}{47}-\frac{3}{53}\right):0{,}2$; 2) $\frac{1-10^{-4}}{99}:\frac{0{,}16}{25}$; 3) $0{,}3^4-0{,}08^2-\frac{1}{125}+\frac{3}{25}-\frac{3}{5}+1$.

1.2. Представьте в виде обыкновенной дроби.

А

1) 0,125; 2) 0,46; 3) 7,11.

Б

1) 1,328; 2) 0,314; 3) 2,02020202.

В

1) 1,239; 2) 2,7272; 3) 0,0007.

1.3. Представьте в виде десятичной дроби.

А

1) $\frac{1}{125}$; 2) $\frac{7}{16}$; 3) $\frac{141}{11}$; 4) $\frac{48}{9}$.

Б

1) $\frac{1}{625}$; 2) $\frac{14}{111}$; 3) $\frac{235}{16}$; 4) $\frac{341}{24}$.

В

1) $\frac{1}{33}$; 2) $\frac{56}{78}$; 3) $\frac{128}{73}$; 4) $\frac{287}{71}$.

Разложение натурального числа по степеням простых чисел

1.4. Представьте в виде произведения степеней различных простых чисел.

А

1) 512; 2) 97; 3) 4 563.

Б

1) 14 641; 2) 8 041; 3) 1 729.

В

1) 1 000 188; 2) 13 832; 3) 111 111.

1.5. Найдите наименьший общий знаменатель дробей.

А

1) $\frac{1}{15}$; $\frac{7}{55}$; 2) $\frac{2}{45}$; $\frac{4}{99}$.

Б

1) $\frac{1}{441}$; $\frac{6}{343}$; $\frac{11}{81}$; 2) $\frac{11}{49}$; $\frac{13}{84}$; $\frac{1}{28}$.

В

1) $\frac{1}{216}$; $\frac{9}{154}$; $\frac{7}{91}$; $\frac{55}{396}$; 2) $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{48}$; $\frac{3}{80}$; $\frac{5}{112}$.

1.6. Укажите, какова максимальная степень a, на которую делится число b.

А

$a = 9$, $b = 32\,805$.

Б

$a = 7$, $b = 50\,421$.

В

$a = 6$; $b = 15\,552$.

1.7. Укажите, какое простое число входит в разложение числа d по степеням простых чисел в максимальной степени.

А

$d = 864$.

Б

$d = 222\,264$.

В

$d = 5\,766$.

1.8. Выпишите все простые делители числа m.

А

1) $m = 440$; 2) $m = 5\,421$; 3) $m = 343\,434$.

Б

1) $m = 9\,317$; 2) $m = 2\,016$; 3) $m = 5\,600$.

В

1) $m = 15\,912$; 2) $m = 20\,160$; 3) $m = 40\,560$.

Делимость, остатки

1.9. Укажите остаток при делении на: а) 2; б) 3; в) 4; г) 5; д) 8; е) 9; ж) 10; з) 11.

А

1) 4 096; 2) 303 435; 3) 3^5.

Б

1) 1 359 216; 2) 164 235 111; 3) 5^{20}.

В

1) 123 456 789 123 456 789; 2) 7^{239}; 3) 30^{2008}.

1.10. Используя разложение числа по степеням 10, докажите признаки делимости на p и q.

А

$p = 5$, $q = 10$.

Б

$p = 3$, $q = 9$.

В

$p = 4$, $q = 8$.

Системы счисления

1.11. Переведите число из одной системы счисления в другую.

А

1) 1 000 из двоичной в десятичную;
2) 1 024 из десятичной в двоичную;
3) 10,11 из двоичной в десятичную.

Б

1) 1 359 из десятичной в двоичную;
2) 1 010 101 из двоичной в десятичную;
3) 0,1 из двоичной в десятичную.

В

1) 3 654 из десятичной в двоичную;
2) 111 010 101 001 из двоичной в десятичную;
3) 1,1011 из двоичной в десятичную.

Приближенные вычисления, погрешности

В следующих заданиях принято: «точное» значение числа $\pi = 3{,}14159$; ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли $g = 9{,}81$ м/с^2; постоянная Авогадро $N_А = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

1.12. Округлите до десятитысячных.

А

1) 2,3289654; 2) 3,6540345.

Б

1) 2,32802654; 2) 123,7659012.

В

1) 2,3285554; 2) 0,0006754.

1.13. Вычислите относительную погрешность.

А

1) $\pi \approx 3{,}141$; 2) $g \approx 10$ м/с^2.

Б

1) $\pi \approx 3{,}1416$; 2) $g \approx 9{,}8$ м/с^2.

В

1) $\pi \approx 3{,}1416$; 2) $N_А \approx 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

1.14. Запишите число в стандартном виде. Укажите его порядок и округлите мантиссу до тысячных.

А

1) 735 274; 2) 32 465 103.

Б

1) 6,0054; 2) 0,000000011.

В

1) $139{,}2 \cdot 10^{-3}$; 2) $7\,543 \cdot 10^{-5}$.

1.15. Вычислите с точностью до 0,01 значения выражений $x + y$, $x - y$, xy и $\frac{x}{y}$.

А

1) $x = 2{,}1$; $y = 3{,}5$; 2) $x = 6{,}18$; $y = 2{,}24$.

Б

1) $x = 26{,}4$; $y = 17{,}3$; 2) $x = 6{,}347$; $y = 2{,}24$.

В

1) $x = 2{,}13 \cdot 10^{-2}$; $y = 3{,}51 \cdot 10^{-2}$; 2) $x = 0{,}18 \cdot 10^{-3}$; $y = 2{,}24 \cdot 10^{-2}$.

1.16. Найдите относительную погрешность (в процентах) следующих измерений; проценты вычислите с точностью до 0,1.

А

1) $A = 240 \pm 1$;
2) радиус Земли (в км): $R = 6\,380 \pm 1$.

Б

1) Скорость света (в км/с): $\left|c - 2{,}998 \cdot 10^5\right| < 100$;
2) диаметр Луны (в км): $d = 3\,476 \pm 1$.

В

1) Масса Земли (в кг): $M = 5{,}976 \cdot 10^{24}$ (все цифры верные);
2) диаметр Солнца (в км): $d = 1{,}392 \cdot 10^{-2}$ (все цифры верные).

■ Комплексные числа

1.17. Вычислите значения выражений.

А

1) $3 + 17i + \dfrac{2-i}{3}$; 2) $(3 + 17i)\left(\dfrac{2-i}{3}\right)$; 3) $(3 + 11i) : i$; 4) $(i + 1)^2$;

5) $|2 - 14i|$; 6) $(1+i)^2 + \dfrac{-2+3i}{2i}$.

Б

1) $\dfrac{2-i}{5} + \dfrac{2+i}{10}$; 2) $\left(\dfrac{2-i}{5}\right)\left(\dfrac{2+i}{10}\right)$; 3) $\dfrac{2-i}{5} : \dfrac{2+i}{10}$; 4) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4$;

5) $\left|\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right|$; 6) $\dfrac{1+iz}{1-iz}$, где $z = -2 + 3i$.

В

1) $\dfrac{4-i}{5+i} - \dfrac{i}{1-i}$; 2) $\left(\dfrac{4-i}{5+i}\right)\left(\dfrac{i}{1-i}\right)$; 3) $\dfrac{4-i}{5+i} : \dfrac{i}{1-i}$; 4) $\left(\sqrt{3}i + 1\right)^5$; 5) $\dfrac{2z^2 + i}{iz + 2}$,

где $z = -2 + i$; 6) $\left|\left(\sqrt{3}i + 1\right)^3\right|$.

1.18. Изобразите множество точек.

А

1) $|z - i| < 1$; 2) $|z - i| = |z + 4|$; 3) $|z| = 2$.

Б

1) $|z - 2 + i| \geq 4$; 2) $\dfrac{|z-i|}{|z+i|} = 1$; 3) $|z| \leq |z + 1|$.

В

1) $\left|\dfrac{z-3}{z+5}\right| \leq 2$; 2) $-i|z - 4| = \dfrac{2}{i}$; 3) $|z - 1| + |z + i| \leq 1$.

1.19. Найдите все (в том числе комплексные) корни уравнения.

А

1) $z^2 + 1 = 0$; 2) $z^3 - 3z^2 + x - 3 = 0$; 3) $z^3 + 1 = 0$.

Б

1) $z^3 - 1 = 0$; 2) $z^3 - z^2 + 3z - 3 = 0$; 3) $z^4 - 1 = 0$.

В

1) $z^3 + 5z^2 + 6z + 2 = 0$; 2) $z^4 + 4z^2 + 3 = 0$; 3) $z^5 - z^4 - z + 1 = 0$.

Матричные тесты

■ Нахождение НОД и НОК ■ Делимость чисел ■ Комплексные числа

■ Нахождение НОД и НОК

1.20. Сопоставьте паре чисел пару, состоящую из их НОК и НОД.

А

Числа	НОК; НОД			
	24; 3	108; 18	144; 18	36; 3
36; 54				
18; 144				
12; 9				
3; 24				

Б

Числа	НОК; НОД			
	27 648; 8	1 332; 2	1 274; 91	11 088; 7
36; 74				
1 024; 216				
637; 182				
112; 693				

В

Числа	НОК; НОД			
	900; 60	1 890; 3	2 975; 17	4 515; 43
135; 42				
425; 119				
301; 645				
180; 300				

■ Делимость чисел

1.21. Сопоставьте числу пару, состоящую из остатков от деления.

А

Число	Остаток от деления на 2 и на 3			
	1; 1	0; 1	1; 0	0; 0
256				
324				
751				
537				

Б

Число	Остаток от деления на 4 и на 11			
	1; 4	0; 5	3; 1	3; 4
331				
324				
103				
169				

В

Число	Остаток от деления на 9 и на 13			
	1; 6	7; 10	2; 1	4; 6
5^{20}				
1 024				
1 111				
721				

■ Комплексные числа

1.22. Сопоставьте кривой (области) на комплексной плоскости соответствующее уравнение (неравенство).

А

Условие	$\operatorname{Re} z = 1$	$\operatorname{Im} z = 1$	$\lvert z\rvert = 1$	$\lvert z\rvert \le 1$
Прямая, параллельная оси Oy				
Окружность радиуса 1				
Прямая, параллельная оси Ox				
Круг радиуса 1				

Б

Условие	$\operatorname{Re} z > 1$	$\lvert z\rvert = 5$	$\operatorname{Im} z = 11$	$z\bar{z} = 5$
Полуплоскость, ограниченная слева прямой $x = 1$				
Окружность радиуса 5				
Окружность радиуса $\sqrt{5}$				
Прямая, параллельная оси Ox				

В

Условие	$\lvert z\rvert + \lvert z - i\rvert = 5$	$\lvert z\rvert = 5$	$\lvert z\rvert + \lvert z + i\rvert = 5$	$\overline{z}z = 5$
Эллипс с фокусами в точках с координатами (0, 0) и (0, 1)				
Окружность радиуса 5				
Окружность радиуса $\sqrt{5}$				
Эллипс с фокусами в точках с координатами (0, 0) и (0, –1)				

Самостоятельные работы

■ Разложение натурального числа по степеням простых чисел ■ Системы счисления ■ Приближенные вычисления ■ Комплексные числа

■ Разложение натурального числа по степеням простых чисел

1.23. 1) Разложите в произведение степеней простых чисел;
2) найдите НОД и НОК.

А

Вариант 1
1) а) 1 800; б) 559;
2) (196, 147).

Вариант 2
1) а) 533; б) 1 656;
2) (225, 175).

Б

Вариант 1
1) $2^{12} - 1$;
2) (1 144, 1 672).

Вариант 2
1) $2^{16} - 1$;
2) (1 496, 2 736).

1.24. Найдите НОД.

В

Вариант 1

(1...1 (единица повторяется 12 раз); 1...1 (единица повторяется 14 раз)).

Вариант 2

(1...1 (единица повторяется 12 раз); 1...1 (единица повторяется 15 раз)).

Системы счисления

1.25. 1) Переведите из десятичной системы счисления в двоичную; 2) переведите числа и их сумму из двоичной системы в десятичную.

А

Вариант 1

1) 254;

2) 11 010 и 1 101.

Вариант 2

1) 412;

2) 10 011 и 1 101.

Б

Вариант 1

1) 666;

2) 10,01 и 110,111.

Вариант 2

1) 561;

2) 101,11 и 11,011.

1.26. 1) Переведите из десятичной системы счисления в двоичную числа и сложите их; 2) переведите числа, их сумму и разность из двоичной системы счисления в десятичную.

В

1) 153,25 и 248,75;

2) 1 101 111 011,01 и 1 011 010 011,011.

Указание. В заданиях 2) проверьте правильность вычислений переводом исходных данных и результатов в десятичную систему счисления.

■ Приближенные вычисления

1.27. 1) Вычислите относительную погрешность приближенного числа относительно точного значения; 2) представьте число в виде десятичной дроби с точностью до 0,01; 3) выполните действия с точностью до 0,01.

А

Вариант 1

1) 2,72 относительно 2,718;

2) 254,3459034;

3) $x + y$, $x = 1{,}04 \cdot 10^{-3}$, $y = 6{,}08 \cdot 10^{-2}$.

Вариант 2

1) 2,71 относительно точного значения 2,718;

2) 716,94563803;

3) $x - y$, $x = 1{,}04 \cdot 10^{-3}$, $y = 6{,}08 \cdot 10^{-2}$.

Б

Вариант 1

1) x^2, если $x \approx 2{,}72$, $x = 2{,}718$;

2) $\dfrac{17}{11}$;

3) $x + y$, $x = 1{,}15 \cdot 10^{-3}$, $y = 8{,}08$.

Вариант 2

1) x^2, если $x \approx 3{,}14$, $x = 3{,}142$;

2) $\dfrac{16}{13}$;

3) xy, $x = 1{,}04 \cdot 10^{-3}$, $y = 6{,}08 \cdot 10^{-2}$.

В

1.28. 1) Вычислите относительную погрешность приближенного числа $x^2 + y$, если $x \approx 3{,}14$; $x = 3{,}142$; $y \approx 2{,}72$; $y = 2{,}717$; 2) представьте число в виде десятичной дроби с точностью 0,01: $6\dfrac{3}{14}$; 3) выполните действия с точностью до 0,01: $\dfrac{x}{y}$, $x = 1{,}04 \cdot 10^{-3}$, $y = 6{,}08 \cdot 10^{-2}$.

■ Комплексные числа

1.29. 1) Вычислите значение выражений; 2) изобразите множество точек, удовлетворяющих уравнению или неравенству; 3) найдите корни уравнения.

А

Вариант 1

1) $\dfrac{2+3i}{3+2i}-5+6i;$

2) $|z| \le 4;$

3) $z^2+7z+100=0.$

Вариант 2

1) $\dfrac{2-3i}{3+2i}+5+6i;$

2) $|z-i| \ge 9;$

3) $z^2-11z+90=0.$

Б

Вариант 1

1) $\dfrac{2-3i}{3+2i}-\dfrac{i-1}{2+i}(i-4);$

2) $|zi-i| \ge 6;$

3) $z^3-8=0.$

Вариант 2

1) $\dfrac{2-3i}{3-2i}+\dfrac{i-1}{2-i}(-i-4);$

2) $|zi+1| \le 12;$

3) $z^3+8=0.$

В

Вариант 1

1) $\dfrac{(2-3i)(i+1)}{(3+2i)(3i-1)}-\dfrac{i-1}{2+i}(i-4);$

2) $|z-i|+|z+1|=1;$

3) $z^4+8z^2+7=0.$

Вариант 2

1) $\dfrac{(2+3i)(-i+1)}{(3-2i)(-3i-1)}+\dfrac{i+1}{2-i}(i-4);$

2) $|z-2i|+|z+i-1|=1;$

3) $z^4+12z^2+32=0.$

Контрольные тесты с выбором ответа

■ Комплексные числа ■ Делимость, остатки ■ Системы счисления

■ Комплексные числа

А

1.30. Значение выражения $\dfrac{2-5i}{5-2i}$ равно

а	б	в	г
$\dfrac{20-18i}{29}$	$\dfrac{18-20i}{29}$	$\dfrac{20-21i}{29}$	$\dfrac{28-20i}{21}$

1.31. Уравнение $|z|=2$ задает

а	б	в	г
окружность радиуса 2	круг радиуса 2	окружность радиуса $\sqrt{2}$	круг радиуса $\sqrt{2}$

1.32. Корнями уравнения $z^2+6=0$ являются числа

а	б	в	г
$6i;\ -6i$	$\sqrt{6}i;\ -\sqrt{6}i$	$6;\ -6$	$3+2i;\ 2-3i$

Б

1.33. Значение выражения $\dfrac{1-i}{1+2i}:(i-2)$ равно

а	б	в	г
$\dfrac{8-6i}{-25}$	$\dfrac{-1+7i}{25}$	$\dfrac{-1+7i}{-25}$	$\dfrac{6-8i}{-25}$

1.34. Уравнение $|z - 1 + i| = 2$ задает

а	б	в	г
окружность радиуса 2 с центром в точке (–1, 1)	круг радиуса 2 с центром в точке (–1, 1)	окружность радиуса 2 с центром в точке (1, –1)	круг радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке (1, –1)

1.35. Корнями уравнения $z^3 + 8 = 0$ являются числа

а	б	в	г
$2,\ 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$-2,\ 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$-2,\ 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$-2,\ 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

В

1.36. Выражение $(1 + i)^5$ равно

а	б	в	г
$32(1 + i)$	$32(1 - i)$	$4(i - 1)$	$4(-i - 1)$

1.37. Уравнение $|zi - 1 + i| = 2$ задает

а	б	в	г
окружность радиуса 2 с центром в точке (–1, 1)	круг радиуса 2 с центром в точке (–1, –1)	окружность радиуса 2 с центром в точке (1, –1)	круг радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке (1, –1)

1.38. Корнями уравнения $z^4 + 10z^2 + 21 = 0$ являются числа

а	б	в	г
уравнение не имеет корней	$3i,\ -3i,\ 7i,\ -7i$	$-i\sqrt{3},\ i\sqrt{3},\ i\sqrt{7},\ -i\sqrt{7}$	$\sqrt{7} - i\sqrt{3},\ \sqrt{7} + i\sqrt{3},\ \sqrt{3} + i\sqrt{7},\ \sqrt{3} - i\sqrt{7}$

■ Делимость, остатки

А

1.39. Остаток от деления числа 13 579 на 8 равен

а	б	в	г
1	3	5	7

1.40. Максимальная степень 3, на которую делится 1 701, равна

а	б	в	г
4	5	6	7

Б

1.41. Остаток от деления числа 13 579 203 на 11 равен

а	б	в	г
3	0	6	8

1.42. Максимальная степень 4, на которую делится 6 656, равна

а	б	в	г
2	3	4	5

В

1.43. Остаток от деления числа 13 579 214 на 33 равен

а	б	в	г
0	2	11	9

1.44. Максимальная степень 6, на которую делится 64 800, равна

а	б	в	г
3	4	5	6

■ Системы счисления

А

1.45. Число 1 010 101, записанное в двоичной системе, в десятичной системе имеет вид

а	б	в	г
86	85	84	83

Б

1.46. Число 721, записанное в десятичной системе, в двоичной системе имеет вид

а	б	в	г
1 000 011 011	1 000 011 010	1 000 010 010	1 011 011 010

В

1.47. Число 1,101, записанное в двоичной системе, в десятичной системе имеет вид

а	б	в	г
2,523	2,671	2,625	2,525

ГЛАВА 2

Корни, степени, логарифмы

Тренажеры

■ Вычисление значений выражений ■ Логарифмирование выражений. Нахождение выражения по его логарифму ■ Преобразование выражений ■ Сравнение значений выражений ■ Уравнения ■ Неравенства

■ Вычисление значений выражений

2.1. Вычислите значение выражения.

А

1) $\sqrt{841}$; 2) $\sqrt{0{,}0625}$; 3) $\sqrt{0{,}000324}$; 4) $\sqrt[3]{2{,}16\cdot 10^5}$; 5) $\sqrt[4]{1{,}296\cdot 10^{-5}}$;

6) $\dfrac{(-3)^3\cdot 3^5}{(-3)^9}$; 7) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4}-\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^{-2}$; 8) $\dfrac{3^{-1}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}}{2-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{2}}\left(5^0-\dfrac{1}{6}\right)^{-1}+2\cdot 10^{-1}$;

9) $\left(\dfrac{256}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}$; 10) $(0{,}064)^{\frac{2}{3}}$; 11) $4^{3,5}$; 12) $\left(2{,}7\cdot 10^{-8}\right)^{-\frac{4}{3}}$;

13) $\left(3{,}2\cdot 10^6\right)^{0,2}$; 14) $\log_2\dfrac{1}{8}$; 15) $\log_3\dfrac{1}{81}$; 16) $\log_{16}1$; 17) $\log_{\frac{1}{3}}9$;

18) $\log_5 125$; 19) $\log_{49}7$; 20) $\lg 0{,}0001$; 21) $\log_4 32$; 22) $\ln e^{-3}$;
23) $e^{3\ln 5}$; 24) $25^{\log_5 3}$; 25) $10^{\lg 0,5}$; 26) $7^{2\log_{49}2}$; 27) $4^{2\log_4 10}$;
28) $10^{1+\lg 5}$; 29) $10^{2-\lg 2}$; 30) $10^{\lg 2+\lg 3}$.

Б

1) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{15}$; 2) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{125}-\sqrt[3]{216}$; 3) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{8}}\cdot\sqrt[8]{\dfrac{1}{4}}$;

4) $\sqrt[3]{512}-\sqrt[5]{27}\cdot\sqrt[5]{9}$; 5) $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{125}}{125}}$; 6) $0{,}27^{-\frac{1}{3}}\cdot 0{,}1^{-\frac{1}{3}}$; 7) $8^{-0,5}:32^{1,5}$;

8) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} \cdot 64^{-\frac{1}{2}}$; 9) $\left(3^{-\frac{3}{4}} \cdot 8\right)^{\frac{4}{3}}$; 10) $4^{-\frac{3}{2}} + 4^0 + 4^{\frac{3}{2}}$; 11) $\dfrac{\log_3 36}{\log_3 6}$;

12) $\log_2 \log_2 16$; 13) $2^{\log_5 625} \cdot 5^{\log_2 0{,}25}$; 14) $\log_4 5 + \log_4 0{,}008 + \log_4 25$;

15) $\log_{\frac{1}{9}} \dfrac{\sqrt[3]{3}}{3}$.

B

1) $\left(2\sqrt{2}\right)^{-2} + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-4}$; 2) $\sqrt{7+2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7-2\sqrt{6}}$;

3) $\sqrt[3]{2 \cdot 7^2} \cdot \sqrt[3]{4 \cdot 7^4}$; 4) $\sqrt{16-6\sqrt{7}}$; 5) $\sqrt[6]{54}\sqrt{6}\sqrt[3]{2}$; 6) $\left(0{,}09^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$;

7) $\left(8-37^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(8+37^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$; 8) $(54 \cdot 250)^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} - 128^{\frac{1}{6}}$;

9) $5^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{\frac{5}{42}} \cdot 5^{-\frac{2}{7}}$; 10) $\log_2 \dfrac{1}{2} + \log_4 2 + \log_8 4$; 11) $\dfrac{\log_2 18}{\log_{36} 2} - \dfrac{\log_2 9}{\log_{72} 2}$;

12) $\log_8 12 + \log_{\frac{1}{8}} 12$; 13) $\lg\left(7^{\log_7 10}\right)$; 14) $\log_2\left(\log_4 12 - \dfrac{1}{\log_3 4}\right)$.

Логарифмирование выражений. Нахождение выражения по его логарифму

A

2.2. Прологарифмируйте выражение по заданному основанию a.

1) $a = 2$:

а) 128; б) $2^4 \cdot 8^2$; в) $\sqrt[3]{2} \cdot 6$; г) $\dfrac{\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[4]{8}}{\sqrt{24}}$; д) $\sqrt[3]{6}$;

2) $a = 3$:

а) 729; б) $\dfrac{5}{6}$; в) $\dfrac{1}{333}$; г) $\sqrt[3]{72}$; д) 2;

3) $a > 0$; $a \neq 1$:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a}}$; б) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a^7}}}$; в) $\sqrt{\dfrac{7\sqrt{a}}{a}}$; г) $a\sqrt{a\sqrt[4]{\sqrt{a}}}$; д) $a\sqrt{a}\sqrt[3]{a}$.

Б

2.3. Найдите A по его логарифму.

1) $\log_2 A = 4\log_2\sqrt{3}$; 2) $\log_3 A = \log_3 2 + \log_9 3$;

3) $\lg A = \log_{10}x^2 + \log_{100}121$; 4) $\log_a A = 3\log_a 7 - 0{,}25\log_a 3$;

5) $\log_a A = 5\log_a 3 + \dfrac{1}{4}\log_a 5 + 3\log_a 7$; 6) $\log_a A = \log_a\sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\log_a 5$;

7) $\log_a A = \dfrac{2}{3}\log_a\sqrt{2} + \dfrac{5}{6}\log_a 2^6$; 8) $\log_2 A = \log_2(\log_4 5 - \log_{0,25}10)$;

9) $\lg A = -1 + \dfrac{1}{2}\lg(x-1) + \dfrac{1}{2}\lg(x+1) - 3\lg x$;

10) $\log_3 A = \log_9 a - \log_{27} b + \log_{\frac{1}{3}} c$.

В

2.4. Выразите $\lg A$ через логарифмы простых чисел.

1) $A = 720$; 2) $A = \dfrac{5}{6}$; 3) $A = \dfrac{1}{171}$; 4) $A = \sqrt[3]{6}$; 5) $A = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$;

6) $A = 3^5\cdot\sqrt[8]{9}$; 7) $A = \dfrac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{8}}{\sqrt{5}}$; 8) $A = \dfrac{21^{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[3]{87}}{\sqrt{111}}$; 9) $A = \sqrt{\dfrac{11\sqrt{2}}{3\sqrt{33}}}$;

10) $A = 9\sqrt[7]{3^4\cdot 5^{\frac{2}{3}}}$.

Преобразование выражений

2.5. Упростите выражение.

А

1) $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{2}{9}}}{x^{-\frac{4}{3}}}$; 2) $\left(9x^{-5} : x^{-1}\right)^{-2}\left(\dfrac{x^3}{3}\right)^{-3}$; 3) $\left(-\dfrac{2a^{-3}}{b}\right)^{-2}\left(a^2b\right)^{-3}$;

4) $(a^{-2} - b^{-2})\cdot(a+b)^{-1} + b^{-2}a^{-1}$;

5) $\dfrac{m^{-2}n^{-2} - m^{-1}n^{-2}}{m^{-2} - n^{-2}} - \dfrac{1}{m}\left(mn^{-1} + 2m^{-1}n\right)^{-1}$;

6) $\dfrac{y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{2}} - z}{y^{\frac{2}{3}} - z} + \dfrac{y}{y + y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{1}{2}}}$; 7) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} - 2\right)\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$;

8) $\left(\sqrt{a} - \dfrac{\sqrt{ab} + b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} + \dfrac{2\sqrt{ab}}{a - b}\right)$;

9) $\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$;

10) $\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}\right)\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$;

11) $\frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}+\frac{a^2-a\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}-\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}+\frac{4a\sqrt{b}}{a^2-b}$; 12) $\left(\sqrt{6-\sqrt{11}}+\sqrt{6+\sqrt{11}}\right)^2$;

13) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$; 14) $\left(\sqrt{10}-1\right)\left(\sqrt{10}+1\right)$; 15) $\frac{4-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$;

16) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; 17) $\frac{1}{1-\sqrt[4]{7}}$; 18) $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; 19) $\frac{1}{2-\sqrt[3]{7}}$;

20) $\log_2 18+\log_2 3-\log_2 27$; 21) $\log_2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\log_2\frac{4}{3}$;

22) $\log_3 8+3\log_3\frac{9}{2}$; 23) $\log_5 2^3-\log_5 2+2\log_5\frac{5}{2}$;

24) $\log_6 14+\log_6 3-\log_6 7$; 25) $\log_{\frac{1}{4}} 8-\log_{\frac{1}{4}} 3+\log_{\frac{1}{4}} 24$;

26) $e^{2\ln 11+3\ln(1,21)}$; 27) $16^{\log_4 3-0,25\log_2 3}$; 28) $10^{2-\lg 2}-25^{\log_5 7}$;

29) $\frac{1}{3}\left(1+9^{\log_3 7}\right)^{\log_{50} 3}$; 30) $2^{2-\log_2 5}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 5}$.

Б

1) $\frac{a^2+4}{a\sqrt{\left(\frac{a^2-4}{2a}\right)^2+4}}$;

2) $\frac{5b}{\sqrt{a-b}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}\right)\left(1+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)^{-1}$;

3) $\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right)\left(\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}\right)^{-1}\left(\frac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{b^3}}\right)$;

4) $\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)\left(\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}-\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)$;

5) $\left(\sqrt{ab}-\frac{\sqrt{(ab)^2}}{a+(ab)^{\frac{1}{2}}}\right)\left(\frac{\sqrt{ab}}{a-b}\right)^{-1}+\sqrt{ab}-a$;

6) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-1}{\sqrt[4]{a}-1}+\sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}+1}{\sqrt[4]{a}+1}-\sqrt{a}\right)\left(a-\sqrt{a^3}\right)^{-1}$, $a>0,\ a\neq 1$;

7) $1-\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}}:\dfrac{\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{a^2-1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}$, $a>1$;

8) $\dfrac{\sqrt{x^3}+\sqrt{xy^2}-\sqrt{x^2y}-\sqrt{y^3}}{\sqrt[4]{y^5}+\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^5}}$, $x\neq y,\ x>0,\ y>0$;

9) $\dfrac{\left[x\sqrt[4]{x}-\sqrt{xy}\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)-y\sqrt[4]{y}\right]\cdot\left(x+y+\sqrt{xy}\right)}{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\cdot\left[\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)^2+\sqrt[4]{xy}\right]}$;

10) $\left[\dfrac{4m^2n^2}{4mn-m^2-4n^2}-\dfrac{2+\dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n}}{\dfrac{4}{mn}-\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{4}{m^2}}\right]^{\frac{1}{2}}:\dfrac{\sqrt{mn}}{m-2n}$, $m>2n>0$;

11) $5^{\log_5 3-\log_2 8}$; 12) $6^{\log_5 0{,}2+\log_6 15}$; 13) $\dfrac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\left(3^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{2}{3}}-6^{\frac{1}{3}}\right)\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4}\right)}$;

14) $3^{\log_3 6}\cdot\log_2 16$; 15) $\log_2\left(\dfrac{8}{3}\right)+\log_4\left(\dfrac{9}{4}\right)$.

B

1) $\left(\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}-1+x}\right)\left(\sqrt{\left(x^2\right)^{-1}-1}+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}}\right)^{-1}$;

2) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{a^5}-\sqrt[6]{a^2\sqrt{b^6}}}{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}+\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)\left(\dfrac{(a-b)^{-1}}{\sqrt[6]{a^{-5}}}\right)^{-1}$;

3) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{xy^{\frac{1}{2}}-yx^{\frac{1}{2}}}\right)\dfrac{x\sqrt{x}y^{\frac{1}{2}}}{x+y}-\dfrac{2y}{x-y}$;

4) $\dfrac{(a-b)\left(\sqrt[3]{ab}\right)^{-2}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}\left(\sqrt[8]{\left(\dfrac{a\sqrt[3]{b}}{b\sqrt[3]{a}}\right)^{3}}+\left(\dfrac{\sqrt{ab^2}}{\sqrt[8]{a^5b^7}}\right)^{2}\right)^{-1}$;

5) $\dfrac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}-\left(\dfrac{a+\sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ax}}-\sqrt[4]{ax}\right)$; 6) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; 7) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1}$;

8) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}$; 9) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$;

10) $\dfrac{\sqrt{19-6\sqrt{10}}}{\sqrt{19+6\sqrt{10}}}$; 11) $\log_8 12+\log_{\frac{1}{8}} 3$; 12) $\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8$;

13) $\log_3 49\cdot\log_{\sqrt{7}} 5\cdot\log_{25} 27$; 14) $\dfrac{\log_2 18}{\log_{36} 2}-\dfrac{\log_2 9}{\log_{72} 2}$;

15) $3^{\log_5 7}-7^{\log_5 3}$.

■ Сравнение значений выражений

2.6. Сравните значения выражений.

А

1) 91^2 и 91^3; 2) 26^4 и 5^8; 3) 2^{3^2} и 2^{2^3}; 4) 10^{20} и 20^{10};

5) 9^5 и $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-10}$; 6) $(3^{-2})^{-3}$ и $(3^3)^2$; 7) 27^3 и 3^6; 8) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{11}$ и $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{11}$;

9) $\left(\dfrac{11}{13}\right)^4$ и $\left(\dfrac{13}{11}\right)^4$; 10) $27^{\frac{2}{3}}$ и $9^{\frac{5}{2}}$; 11) $\log_5 7$ и $\log_5 8$;

12) $\log_{\frac{1}{5}} 7$ и $\log_{\frac{1}{5}} 8$; 13) $\log_5 7$ и $\log_2 5$; 14) $\log_{\frac{1}{3}} 5$ и $\log_3 5$;

15) $\lg 0{,}7$ и $\lg\dfrac{8}{11}$; 16) $\lg\sqrt{5}$ и $\lg 2{,}5$; 17) $\lg 0{,}7$ и $\lg(0{,}7)^2$;

18) $\lg 0{,}5^2$ и $\lg^2 0{,}5$; 19) $\sqrt{125}$ и $5^{\frac{5}{2}}$; 20) $299\cdot 301$ и 300^2.

Б

1) $9^{\frac{3}{2}}$ и 28; 2) $(\sqrt{125})^3$ и $5(\sqrt{5})^7$; 3) 45^2-31^2 и 44^2-30^2;

4) 296^3-214^3 и $(296-214)^3$; 5) $(117+213)^3$ и 117^3+213^3;

6) $2\,048^3$ и 2^{33}; 7) 28^{16} и 79^{12}; 8) $1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot 10^{10}$ и 10^{55};

9) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ и $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$; 10) $\left(2\sqrt[4]{2}\right)^{100}$ и $\left(\frac{1}{8}\right)^{-8}$; 11) $\lg 12 - \lg 5$ и $\lg 5 - \lg 2$;

12) $\log_{0,7}2 + \log_{0,7}18$ и $3\log_{0,7}4$; 13) $\log_2 5 + \log_2 7$ и $\log_2(5 + 7)$;

14) $\log_{0,2}4 + \log_{0,2}6$ и $\log_{0,2}(4 + 6)$; 15) $\frac{\lg 57 + \lg 73}{2}$ и $\lg\frac{57 + 73}{2}$;

16) $\lg\sqrt[3]{10}$ и $\lg 2$; 17) $\lg 1,05$ и $\lg(1,05)^{-2}$;

18) $1 - 2\lg 2 + \lg 3$ и $2\lg 11$; 19) $\lg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $\lg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$;

20) $\frac{1}{2} + \lg 3$ и $\lg 20 - \lg 3$.

B

1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\left(\sqrt{8}\right)^{-10}$; 2) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}$ и $\sqrt[13]{5}$; 3) $3\cdot\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[3]{81}$; 4) $\sqrt[12]{623}$ и $\sqrt[3]{5}$;

5) $\frac{1}{2}\sqrt{40}$ и $\frac{1}{3}\sqrt{99}$; 6) $\sqrt{7} + \sqrt{15}$ и 7; 7) $\left(1,2 + \sqrt{5}\right)^{100}$ и 3^{100};

8) $\sqrt{12} - \sqrt{11}$ и $\sqrt{11} - \sqrt{10}$; 9) $\sqrt[30]{1} + \sqrt[4]{2}$ и 2; 10) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{32}}}$ и $\sqrt[7]{\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^8}}}$;

11) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$ и $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$; 12) $(\log_2 5)^2$ и $\log_2 20$; 13) $\log_\pi 2 + \log_2\pi$ и 2;

14) $\log_3 10 + 4\lg 3$ и 4; 15) $3^{\log_8 2}$ и $2^{\log_8 3}$; 16) $10^{\log_9 3}$ и $7^{\log_4 2}$;

17) $2^{\sqrt{\log_2 3}}$ и $3^{\sqrt{\log_3 2}}$; 18) $\frac{4}{\lg 0,5}$ и $\frac{7}{\lg 0,5}$; 19) $\log_{20}80$ и $\log_{80}640$;

20) $\log_{135}675$ и $\log_{80}480$.

■ Уравнения

2.7. Решите уравнение.

A

1) $\sqrt{3x^2 - 5x - 12} = 10$; 2) $\sqrt{x^2 - 5} = \sqrt{x + 1}$; 3) $\sqrt{x + 1} = x - 1$;

4) $\sqrt{6 - x - x^2} = x + 1$; 5) $\sqrt{x + 2} - \sqrt{2x - 3} = 1$; 6) $\sqrt{\frac{x}{x - 2}} + \sqrt{\frac{x - 2}{x}} = \frac{5}{2}$;

7) $\sqrt{5 + x^2} + \sqrt{5 - x^2} = 4$; 8) $\sqrt{x - 4\sqrt{x} + 4} = 3$;

9) $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = 2$; 10) $\sqrt{3x + 7} - \sqrt{x + 1} = 2$;

11) $2^{x+3} - 2^x = 112$; 12) $3^{2x-2} + 3^{2x} = 30$; 13) $2^{x+1} + 4^x = 8$;

14) $5^x = 0{,}008$; 15) $3^{x+2} = 9^{x+1}$; 16) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 30$;

17) $4^{x+3} + 2^{2x+2} = 51$; 18) $3^{2x} - 2\cdot 3^x = 3$; 19) $5^x - 4 = 5^{\frac{x-1}{2}}$;

20) $2\cdot 3^{x+1} - 5\cdot 9^{x-2} = 81$; 21) $\log_3(2x-1) = 2$; 22) $\log_3\sqrt{2x+1} = 1$;

23) $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{1}{3x-5} = 0$; 24) $\ln(3x-5) = 0$;

25) $\log_2(x+3) - \log_2(4x-5) = 0$; 26) $\log_5(x-10) = 2 + \log_5 2$;

27) $\lg(3x-2) = 3 - \lg 25$; 28) $\lg(x^2 - x) = 1 - \lg 5$;

29) $\log_6(2x^2 - x) = 1 - \log_6 2$; 30) $\log_2(4-x) + \log_2(1-2x) = 2\log_2 3$.

Б

1) $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$; 2) $1 + \sqrt{1 + x\sqrt{x^2-24}} = x$;

3) $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}} - \sqrt[3]{5+\sqrt{x}} = 1$; 4) $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$;

5) $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$; 6) $\sqrt{x^2+9} - \sqrt{x^2-7} = 2$;

7) $\sqrt{10-x^2} + \sqrt{x^2+3} = 5$; 8) $2\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[6]{x} - 18 = 0$;

9) $x^2 - 4x - 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$; 10) $\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{3x+2} = 0$;

11) $4^x - 10\cdot 2^{x-1} - 24 = 0$; 12) $\left(\sqrt[5]{3}\right)^x + \left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10} = 84$;

13) $x^{\frac{\lg x+5}{3}} = 10^{5+\lg x}$; 14) $x^{\log_4 x} = 2^{3(\log_4 x - 1)}$; 15) $\dfrac{2^x + 10}{4} = \dfrac{9}{2^{x-2}}$;

16) $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$; 17) $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} = 24$;

18) $3^{2x+4} + 45\cdot 6^x - 9\cdot 2^{2x+2} = 0$; 19) $3\cdot 16^x + 2\cdot 81^x = 5\cdot 36^x$;

20) $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$.

В

1) $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$; 2) $\sqrt{x^3+x^2-1} + \sqrt{x^3+x^2+2} = 3$;

3) $5\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x}} + 3\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x}} = 8$; 4) $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$;

5) $6\sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{x-2} = 5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}$; 6) $x^3 + x + \sqrt[3]{x^3+x-2} = 12$;

7) $\sqrt{6-4x-x^2} = x+4$; 8) $4 + \sqrt{26-x^2} = x$;

9) $\dfrac{\sqrt{5-x^2}}{x+1} = 1$; 10) $\sqrt{x-\sqrt{x^2-4}} + \sqrt{x+\sqrt{x^2-4}} = 3$;

11) $4^{1-(x+1)^2} - 3\cdot 2^{2-(x+1)^2} + 8 = 0$; 12) $\dfrac{\lg\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\lg\sqrt[3]{x-40}} = 3$;

13) $\log_2\sqrt[4]{2x^2+3x+2} = \log_4(2x)$; 14) $\log_{1-x}3 - \log_{1-x}2 = \dfrac{1}{2}$;

15) $\lg x-\frac{1}{2}\lg\left(x-\frac{1}{2}\right)=\lg\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\lg\left(x+\frac{1}{8}\right)$;

16) $\lg(x+5)-\lg(3x+25)=\lg(x-15)-\lg 17$;

17) $\log_2(9-2^x)=3-x$; 18) $\log_2(2^x-3)+x=2$;

19) $\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)$; 20) $\lg(2^x+x-13)=x-x\lg 5$.

Неравенства

2.8. Решите неравенство.

А

1) $\sqrt{x}\left(x^2-1\right)<0$; 2) $\sqrt{x+5}<2$; 3) $\sqrt{\frac{x}{2-x}}<2$; 4) $\left(\frac{1}{32}\right)^{2x}\geq\sqrt{0{,}125}$;

5) $7^{x^2}\cdot 49^{-x}\geq 343$; 6) $4^x-6\cdot 2^x+8>0$; 7) $\log_{\frac{1}{3}}(5x-1)\geq 2$;

8) $\log_2^2 x<4$; 9) $(x-2)\lg^2(x-4)>0$; 10) $\log_x^2 16-4\log_x 2-12<0$.

Б

1) $\sqrt{\frac{5-x}{x+2}}\frac{x^2-16}{(x-1)^3}\leq 0$; 2) $\sqrt{3-2x}<(x+2)$; 3) $x-5\sqrt{x}+6\leq 0$;

4) $5^{\sqrt[x]{64}}>625$; 5) $3^{4x-1}\leq 5^{x-\frac{1}{4}}$; 6) $2^x-3\cdot 2^{1-x}\geq -1$;

7) $\sqrt{\log_{0,5}(5-6x)}>1$; 8) $\frac{\log_{0,5}(2-x)}{(x+1)(x-4)}\geq 0$;

9) $\lg^3 x+\lg^2 x-2\lg x>0$; 10) $2\cdot 4^{\sqrt{x}}-5\cdot 2^{\sqrt{x}}+2<0$.

В

1) $x-\sqrt{x-3}-5<0$; 2) $(x+1)\sqrt{x^2+1}\geq x^2-1$;

3) для любых значений a решите неравенство $a\sqrt{x+2}>3-a$;

4) $11^{x-7}<13^{7-x}$; 5) $9^{\frac{1}{x}}+6^{\frac{1}{x}}>2^{\frac{2}{x}+1}$; 6) $\left|3^{x-2}-1\right|\geq 2$;

7) $\log_4\left(5-2^x\right)\cdot\log_2\frac{5-2^x}{8}\leq -1$; 8) $\frac{\log_3(3-x)}{\log_{0,5}(x-2)}\geq 0$;

9) $\log_{\frac{1}{3}} x>\log_x 3-\frac{5}{2}$; 10) $8^x\geq 6\cdot 9^{|x-1|}$.

Матричные тесты

■ Вычисление корней ■ Преобразование степеней ■ Логарифмирование выражений ■ Сравнение числовых выражений ■ Уравнения ■ Справедливость тождеств

■ Вычисление корней

2.9. Сопоставьте выражения и их значения.

А

Выражение	Значение			
	10	20	50	80
$\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}$				
$\sqrt[3]{100}\cdot\sqrt[6]{6400}$				
$\sqrt{250}\cdot\sqrt{10}$				
$\sqrt[4]{500}\cdot\sqrt{128\sqrt{5}}$				

Б

Выражение	Значение			
	6	12	18	24
$\dfrac{\sqrt[4]{16\cdot 81}\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$				
$\dfrac{\sqrt[3]{108}\cdot\sqrt[6]{27\cdot 256}}{\sqrt{12}}$				
$\dfrac{\sqrt[3]{72}\cdot\sqrt{108}}{\sqrt[6]{192}}$				
$\dfrac{\sqrt{96}\cdot\sqrt[3]{36}}{\sqrt[6]{6}}$				

B

Выражение	Значение			
	$\sqrt{5}-2$	$2-\sqrt{5}$	$1+\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}-1$
$\sqrt{6+2\sqrt{5}}$				
$\sqrt{9-4\sqrt{5}}$				
$1-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$				
$\sqrt{21-4\sqrt{5}}$				

■ Преобразование степеней

2.10. Найдите значение выражения.

A

Выражение	Значение			
	$8a^{-1}$	8	$8a$	$8a^2$
$\left(4a^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$				
$\left(\sqrt{2}\cdot a^{\frac{4}{3}}\right)^6 a^{-6}$				
$\dfrac{\left(4a^{-\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{4}}}{(2a)^{-\frac{1}{2}}}$				
$\left(\dfrac{a^{\frac{4}{3}}}{2a^{\frac{5}{3}}}\right)^{-3}$				

Б

Выражение	Значение			
	ab^{-2}	ab^{-1}	1	ab^2
$\dfrac{\left(ab^{-2}\right)^{-\frac{3}{2}}}{\left(a^{-1}b^2\right)^{\frac{5}{2}}}$				
$\dfrac{\left(a^{-1}b^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(a^2b^{-1}\right)^{\frac{3}{4}}}{\left(a^{-4}b^{15}\right)^{-\frac{1}{4}}}$				
$\dfrac{\left(a^2b\right)^{-\frac{1}{3}}\left(a^{-4}b^4\right)^{-\frac{1}{4}}}{\left(a^{-1}b^2\right)^{-\frac{2}{3}}}$				
$\dfrac{\left(a^3b^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(a^3b^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}}{\left(a^{-\frac{7}{3}}b^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{3}{4}}}$				

В

Выражение	Значение			
	$a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$	$a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}$	$-\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$	$-\left(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}\right)$
$\dfrac{a\cdot a^{\frac{1}{3}}-b\cdot b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}}$				
$\dfrac{a^2+b^2}{a^{\frac{4}{3}}-(ab)^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}}}$				
$\dfrac{a^2-b^2}{-\left(a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}}\right)}$				
$\dfrac{a\cdot a^{\frac{1}{3}}-b\cdot b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$				

■ Логарифмирование выражений

2.11. Сопоставьте числу его логарифм по основанию 2.

А

Выражение	Значение			
	$-\frac{14}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{13}{3}$
$\log_2\left(\sqrt[3]{4}\cdot\frac{1}{16}\right)$				
$\log_2\frac{32}{\sqrt[3]{4}}$				
$\log_2\frac{\sqrt[3]{16}}{64}$				
$\log_2\frac{16}{\sqrt[3]{32}}$				

Б

Выражение	Значение			
	–4	–5	–6	–7
$\log_2\frac{1{,}25}{80}$				
$\log_2\frac{25\cdot 0{,}12}{48}$				
$\log_2\frac{0{,}4}{12{,}8}$				
$\log_2\frac{0{,}125}{16}$				

2.12. Найдите значение выражения.

В

Выражение	Значение			
	0,125	0,25	0,5	1
$\lg \sqrt[4]{10}$				
$3^{-\log_3 2}$				
$3^{\lg 100-2}$				
$(\log_2 256)^{-1}$				

Сравнение числовых выражений

2.13. Данные четыре выражения занумерованы в порядке возрастания: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Найдите номер каждого выражения.

А

Выражение	Значение			
	a_1	a_2	a_3	a_4
$\sqrt{2\sqrt[4]{16}}$				
$\sqrt{5}$				
$\sqrt[3]{9}$				
$\dfrac{\sqrt{15}}{2}$				

Б

Выражение	Значение			
	a_1	a_2	a_3	a_4
$\sqrt{3\sqrt[3]{4}}$				
$\sqrt{2}\cdot\sqrt[6]{15}$				
$\sqrt[3]{10}$				
$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}$				

В

Выражение	Значение			
	a_1	a_2	a_3	a_4
$\sqrt{2}+\sqrt{5}$				
$\sqrt{20}$				
$3\sqrt{3}-\sqrt{2}$				
$2+\sqrt{3}$				

■ Уравнения

2.14. Какому промежутку принадлежат корни уравнения?

А

Уравнение	$(-1;\ 1)$	$(1;\ 3)$	$[0;\ 3]$	Корней нет
$2^{x^2}=4^x$				
$\sqrt{x^2-2x}=2-x$				
$\sqrt{x^2-2x}=-x$				
$\sqrt{x^2-2x}=x-1$				

2.15. Сопоставьте уравнению верное утверждение о его корнях.

Б

Уравнение	Уравнение имеет один корень	Уравнение имеет два положительных корня	Уравнение имеет два корня разных знаков	Корней нет
$2^{x^2}=4^{x+1}$				
$2^{x^2}=\frac{1}{2}$				
$4^x+2^x=2$				

$4^x + 2^{-3} = 2^x$				

2.16. Сопоставьте пары равносильных уравнений.

В

Уравнение	$\sqrt{2(x+4)} + x = 0$	$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 3$	$x = \sqrt{2(x+4)}$	$\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$
$2^{x^2} = 4^{x+4}$				
$x^2 = 2\lvert x+4\rvert$				
$\log_2(2-x) + \log_2(-x) = 3$				
$2\log_2 x - 1 = \log_2(x+4)$				

■ Справедливость тождеств

2.17. Сопоставьте тождеству набор условий, при которых оно выполняется.

А

Тождество	$a \ge 0,\ b \ge 0$	$a > 0,\ b > 0$	$a,\ b$ — любые числа
$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$			
$\lg ab = \lg a + \lg b$			
$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$			
$(ab)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}}$			

Б

Тождество	$a \ge 0,\ b > 0$	$a > 0,\ b > 0$	$a,\ b$ — любые числа	a — любое число, $b \ne 0$
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$				

Тождество	$a \geq 0,\ b > 0$	$a > 0,\ b > 0$	$a,\ b$ — любые числа	a — любое число, $b \neq 0$
$\lg\frac{a}{b} = \lg a - \lg b$				
$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$				
$2^{a-b} = \frac{2^a}{2^b}$				

В

Тождество	a — любое число	$a \geq 0$	$a > 0$	$a \neq 0$
$\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{a}$				
$\lg a^2 = 2\lg\lvert a\rvert$				
$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$				
$\lg a^3 = 3\lg a$				

Самостоятельные работы

■ Степени и корни ■ Логарифмы ■ Показательные уравнения ■ Логарифмические уравнения

■ Степени и корни

2.18. Запишите выражение в виде степени одного числа или выражения.

А

$$\left[\left(\frac{1}{9} : \frac{8}{27}\right) : \frac{16}{48}\right] : \frac{81}{256} \cdot \frac{1}{2}.$$

Б

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \cdot 27^{-3} + 0{,}2^{-4} \cdot 25^{-2} + \left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}.$$

В

$$\sqrt[3]{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}}\cdot\sqrt{\frac{y}{x}\sqrt[3]{\frac{y}{x}}}.$$

2.19. Упростите выражение.

А

1) $\left(\frac{xy^2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{x^2y}{3}\right)^2$; 2) $2\sqrt{x}+5\sqrt{25x}-3\sqrt{36x}-4\sqrt{9x}$.

Б

1) $\frac{\sqrt[3]{a^5\sqrt{b}\sqrt[4]{a^{-1}}}}{\left(a^2\sqrt[5]{ab^3}\right)^2}$; 2) $\sqrt{5\sqrt[3]{5}}:\left(\sqrt[3]{5\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{5\sqrt[3]{5}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

В

1) $\frac{\sqrt{a^2b^2}-4ab}{a^2b^2}\cdot\frac{\sqrt{a^2}b}{2}\cdot\frac{\sqrt{b^2}}{a}$; 2) $\left(\frac{1}{m-\sqrt{nm}}+\frac{1}{m+\sqrt{nm}}\right)\frac{m^3-n^3}{m^2+mn+n^2}$.

2.20. Вычислите значение выражения.

А

1) $0{,}027^{-\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}+256^0-3^{-1}+5{,}5^0$; 2) $\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}$.

Б

1) $\left(\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{54}\right)\left(5\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$; 2) $\frac{1-x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}}-\frac{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}{x-1}$ при $x=5$.

В

$$\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}.$$

■ Логарифмы

2.21. Упростите выражение.

А

1) $\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^{\lg 9-2}$; 2) $(0{,}01)^{\lg 0{,}2-\frac{1}{2}}$.

Б

$3^{\log_{\sqrt{27}} 17} + 2^{\frac{1}{\log_7 4}}$.

В

$16^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\log_4 3} + 25^{\log_{125} 6}$.

2.22. Дано число a. Выразите через a значение выражения A.

А

$a = \log_2 5,\ A = \log_{\frac{1}{2}} 10 + \log_2 25 + \log_4 20$.

Б

$a = \log_3 2,\ A = \log_{\sqrt{3}} 12 + 2\log_3 18 + 3\log_{\frac{1}{3}} 24$.

В

$a = \log_5 3,\ A = \log_{\frac{1}{5}} 15 + 2\log_{25} 9 - \log_{\sqrt{5}} 3$.

Показательные уравнения

2.23. Решите уравнение.

А

1) а) $4^x = 8^{2x-3}$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$; 2) $5^{2x+1} - 3\cdot 5^{2x-1} = 550$;

3) $5^{2x} - 2\cdot 5^x - 15 = 0$.

Б

1) а) $\dfrac{2^{2x-1}\cdot 4^{x+1}}{8^{x-1}} = 64$; б) $3^{2x-3} - 9^{x-1} + 27^{\frac{2x}{3}} = 675$;

2) $10^x - 5^{x-1}\cdot 2^{x-2} = 950$; 3) $9^x + 6^x = 2\cdot 4^x$;

4) $2^{x^2} = a$. Сколько решений имеет уравнение в зависимости от a?

В

1) $2^{3x+7} + 5^{3x+4} + 2^{3x+5} - 5^{3x+5} = 0$; 2) $9\cdot 16^x - 7\cdot 12^x - 16\cdot 9^x = 0$;

3) $|2-x|\sqrt{x^2-x-2} = |x-2|^2$.

Логарифмические уравнения

2.24. Решите уравнение.

А

1) $\log_{\frac{1}{2}}(x+5) = -1$; 2) $\lg(x-1) + \lg(x+1) = 3\lg 2 + \lg(x-2)$;
3) $\log_3^2 x + \log_9 x + \log_{27} x = 5{,}5$.

Б

1) $\lg(x-9) + 2\lg\sqrt{2x-1} = 2$; 2) $2\log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = 9$;
3) $\log_x^3 10 - \log_x^2 10 - 6\log_x 10 = 0$.

В

1) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{2+x}{10} = \log_{\frac{1}{5}} \frac{2}{x+1}$;

2) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) - \log_2(x+1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x) = 1$;

3) $\log_2^3 2x = 2\log_2^2 x - 9$.

Контрольные тесты с выбором ответа

■ Вычисление значения выражения ■ Решение уравнений ■ Сравнение значений выражений ■ Осмысленность выражений

Вычисление значения выражения

2.25. Вычислите значение иррационального выражения.

А

$\frac{7\sqrt[3]{13}}{\sqrt[3]{104}}$.

а	б	в	г
$\frac{7}{2\sqrt{2}}$	1	$\frac{7}{2}$	14

Б

$$\frac{\sqrt[3]{54\cdot 250}}{\sqrt{2}}-\sqrt[6]{128}.$$

а	б	в	г
$15\sqrt[3]{2}-2\sqrt[6]{2}$	$13\sqrt[6]{2}$	$15\sqrt[6]{2}-2$	$15\sqrt[6]{2}-2\sqrt[3]{2}$

В

$$\frac{4-3x}{(\sqrt{x}-x\sqrt{x})^2}\ \text{при}\ x=\sqrt{2}.$$

а	б	в	г
1	$17-6\sqrt{2}$	$10+6\sqrt{2}$	-1

2.26. Вычислите значение степенного выражения.

А

$$(25a)^{\frac{4}{3}}(5a^2)^{\frac{1}{3}}.$$

а	б	в	г
$5\sqrt[3]{5a^2}$	$5a\sqrt[3]{a^2}$	$5a^2\sqrt[3]{a}$	5^3a^2

Б

$$\frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}+\frac{y-y^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}\ (\text{при}\ x=9,\ y=49).$$

а	б	в	г
2	16	4	10

В

$$\frac{(a+x)^{\frac{1}{2}}+(a-x)^{\frac{1}{2}}}{(a+x)^{\frac{1}{2}}-(a-x)^{\frac{1}{2}}}\ \left(\text{при}\ x=\frac{2ab}{b^2+1}\right),\ b>1,\ a\ge 0.$$

а	б	в	г
ab	$\frac{b}{b^2+1}$	b	$a(b^2-1)$

2.27. Вычислите значение логарифмического выражения.

А

$\log_3 189 - \log_3 7$.

а	б	в	г
-3	$\frac{1}{3}$	$\log_3 182$	3

Б

$\lg(7^{\log_7 10})$.

а	б	в	г
$\lg 7$	$(\log_7 10)^2$	1	$(\lg 7)^2$

В

$\log_{84} 168$ (при $\log_7 12 = a$ и $\log_{12} 24 = b$).

а	б	в	г
$\frac{a}{(a+1)(b-1)}$	$\frac{a}{(a-1)(b-1)}$	$\frac{1}{(a+1)(b-1)}$	$\frac{a(b+1)}{a+1}$

Решение уравнений

2.28. Решите иррациональное уравнение

А

$\sqrt{x-6} = 8 - x$.

а	б	в	г
7; 10	7	10	Корней нет

Б

$\sqrt{x+66}-\sqrt{x+3}=7.$

а	б	в	г
2	–2	1	Корней нет

В

$\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5.$

а	б	в	г
81	16	16; 81	Корней нет

2.29. Решите показательное уравнение.

А

$27^x=9^{\frac{1}{5}}.$

а	б	в	г
$\frac{3}{2}$	3	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{15}$

Б

$2^{2x}+2^x=20.$

а	б	в	г
$\log_2 5$	4	2	Корней нет

В

$3^{x-1}+3^x+3^{x+1}=\frac{39}{14}\left(2^{x-1}+2^x+2^{x+1}\right).$

а	б	в	г
2	1	–1	Корней нет

2.30. Решите логарифмическое уравнение.

А

$\log_{\frac{1}{5}}(2x-3)=-1.$

а	б	в	г
1	4	3	–3

Б

$\log_{12}(x+3)+\log_{12}(x+4)=1.$

а	б	в	г
–7	0	0; –7	Корней нет

В

$x^{\log_2 x}=16.$

а	б	в	г
4	4; $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	Корней нет

■ Сравнение значений выражений

2.31. Сравните значения иррациональных выражений. Расположите числа в порядке возрастания.

А

$a=\sqrt{5},\ b=1+\sqrt{2},\ c=\frac{17}{8}.$

а	б	в	г
$a<b<c$	$c<b<a$	$c<a<b$	$a<c<b$

Б

$a=\sqrt{3}+\sqrt{11},\ b=5,\ c=2+\sqrt{10}.$

а	б	в	г
$a<b<c$	$b<a<c$	$a<c<b$	$b<c<a$

В

$a = \sqrt{3},\ b = \sqrt[3]{4},\ c = \sqrt[4]{5}.$

а	б	в	г
$b < a < c$	$b < c < a$	$c < b < a$	$c < a < b$

2.32. Сравните значения выражений, содержащих степени. Расположите числа в порядке возрастания.

А

$a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}},\ b = 4^{-\frac{1}{3}},\ c = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{4}}.$

а	б	в	г
$b < a < c$	$a < b < c$	$c < b < a$	$c < a < b$

Б

$a = \left(\frac{11}{13}\right)^{4},\ b = \left(\frac{11}{13}\right)^{-4},\ c = 1.$

а	б	в	г
$a < c < b$	$b < c < a$	$c < a < b$	$b < a < c$

В

$a = \left(\frac{5}{3}\right)^{-3} + \left(\frac{5}{4}\right)^{-3},\ b = \left(\frac{3}{5}\right)^{4} + \left(\frac{4}{5}\right)^{4},\ c = 1.$

а	б	в	г
$b < a < c$	$a < c < b$	$b < c < a$	$a < b < c$

2.33. Сравните значения логарифмических выражений. Расположите числа в порядке возрастания.

А

$a = \log_2 1\,000,\ b = \lg 10^{10},\ c = 10{,}1.$

а	б	в	г
$a < c < b$	$b < a < c$	$b < c < a$	$a < b < c$

Б

$a = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}, \ \ b = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}, c = 1.$

а	б	в	г
$b < c < a$	$a < c < b$	$a < b < c$	$b < a < c$

В

$a = \log_{80} 640, \ \ b = \log_{20} 80, \ \ c = \frac{3}{2}.$

а	б	в	г
$b < a < c$	$c < b < a$	$b < c < a$	$a < b < c$

Осмысленность выражений

2.34. Сколько выражений из написанных не имеют смысла?

А

1) $\sqrt{2-\sqrt{5}}$; 2) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$; 3) $\sqrt[3]{-2}$; 4) $\frac{1}{3^0-1}$; 5) $\lg\left(\sqrt[5]{2}-1\right)$.

а	б	в	г
1	2	3	4

Б

1) $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$; 2) $\left(3-7^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{3}{4}}$; 3) $(1-2^0)^{-1}$; 4) $\log_1 3$; 5) $\log_2 \log_2 0{,}1$.

а	б	в	г
2	3	4	5

В

1) $\sqrt{1-0{,}9^{-1}}$; 2) $\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}-1\right)^{\frac{2}{5}}$; 3) $\lg(10^3-2^{10})$; 4) $(-3)^{\log_2 3}$;

5) $\sqrt{x-6}+\sqrt{3-x}$.

а	б	в	г
2	3	4	5

ГЛАВА 3

Прямые и плоскости

Тренажеры

■ Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве ■ Параллельность прямых и плоскостей ■ Перпендикулярность прямых и плоскостей ■ Расстояния ■ Теорема о трех перпендикулярах. Угол между прямой и плоскостью ■ Проектирование ■ Изображение пространственных фигур и построение сечений

■ Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

А

3.1. Каждые две из трех плоскостей пересекаются по различным прямым. Две из этих прямых пересекаются. Докажите, что пересекаются все три прямые.

3.2. Докажите, что для трех попарно скрещивающихся прямых существует плоскость, которая пересекает каждую из них.

3.3. Плоскость пересекает тетраэдр. Какое наибольшее число ребер и граней она может пересечь?

3.4. В параллелепипеде выбрана диагональ. Рассмотрим диагонали граней, которые скрещиваются с ней. Некоторые из них пересекаются. Какие многоугольники они образуют?

3.5. Каждые четыре точки фигуры лежат в одной плоскости. Докажите, что и вся фигура лежит в одной плоскости.

3.6. Точка A не лежит на прямой a. Через точку A проводятся все прямые:

а) пересекающие прямую a;

б) скрещивающиеся с прямой a.

Какое множество точек заполняют эти прямые?

Б

3.7. Докажите, что если n прямых попарно пересекаются друг с другом, то они все лежат в одной плоскости.

3.8. Несколько прямых попарно не скрещиваются. Верно ли, что они лежат в одной плоскости?

3.9. Даны n попарно скрещивающихся прямых. Каким может быть общее количество точек пересечений этих прямых с двумя пересекающимися плоскостями?

3.10. Пусть $PABC$ — тетраэдр; K , L, M, N — середины ребер BC, PB, PA и AC соответственно. Можно ли провести плоскость через прямые: а) AP и KM; б) AP и KL; в) AP и LN; г) LM и KN; д) KM и NL?

3.11. Пусть M и N — центры тяжести (точки пересечения медиан) граней правильного тетраэдра[1]. Найдите длину отрезка MN, если ребро тетраэдра равно a.

В

3.12. Докажите, что если сечение параллелепипеда является многоугольником с числом сторон, бóльшим трех, то у него есть параллельные стороны.

3.13. Докажите, что в сечении куба не может получиться правильный пятиугольник.

3.14. Плоскость не пересекает ни одну из n попарно пересекающихся прямых. Каким может быть n?

3.15. Докажите, что существует плоскость, пересекающая все n попарно скрещивающиеся прямые.

3.16. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке.

---

[1] *Правильный тетраэдр* — это тетраэдр, у которого все грани — правильные треугольники.

3.17. Дана неплоская замкнутая ломаная из четырех звеньев; A, B, C, D — середины ее последовательных звеньев. Докажите, что: а) $AB \parallel CD$; б) $AD \parallel BC$; в) AC и BD пересекаются.

Параллельность прямых и плоскостей

А

3.18. В пространстве проведены две параллельные прямые и пересекающие их две параллельные плоскости. Докажите, что четыре точки пересечения прямых и плоскостей образуют параллелограмм.

3.19. Пусть a, b — прямые, α, β — плоскости, причем прямые не лежат в этих плоскостях. Рассмотрим следующие утверждения: $a \parallel \alpha$, $b \parallel \beta$, $a \parallel b$, $\alpha \parallel \beta$. Из каких трех утверждений следует четвертое?

3.20. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямая AB параллельна плоскости, проходящей через середины отрезков AD, BD, CD.

3.21. Точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Докажите, что середины отрезков AB, BC, CD и DA служат вершинами параллелограмма.

3.22. Найдите геометрическое место точек, являющихся серединами отрезков, соединяющих точки двух параллельных плоскостей.

3.23. Три параллельные плоскости пересекаются двумя прямыми. Докажите, что отрезки прямых между плоскостями пропорциональны. Верно ли обратное утверждение?

3.24. Укажите пары параллельных плоскостей, каждая из которых проходит через три вершины параллелепипеда.

Б

3.25. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка E вне его плоскости. Плоскости ABE и CDE пересекаются по прямой p, а плоскости BCE и ADE — по прямой l. Найдите угол между прямыми p и l.

3.26. Постройте сечение правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию, проходящей через точку:
а) на боковом ребре;
б) на боковой грани;
в) на высоте пирамиды.

3.27. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведены диагонали A_1D и D_1C двух соседних граней AA_1DD_1 и DD_1CC_1. Пусть M и N — середины этих диагоналей; E и F — середины ребер CD и A_1D_1. Докажите, что отрезки EF и MN пересекаются и в точке пересечения делятся пополам.

3.28. Дан правильный тетраэдр. В нем построено сечение плоскостью, параллельной двум его скрещивающимся ребрам. Докажите, что четырехугольник в таком сечении будет прямоугольником. Может ли он быть квадратом?

3.29. Разрежьте куб на три равные четырехугольные пирамиды.

3.30. Через точку на ребре треугольной пирамиды проведены две плоскости, параллельные двум граням пирамиды. Разрежьте оставшийся многогранник на две треугольные призмы.

В

3.31. Плоскость проходит через середины ребер AB и AC пирамиды $ABCD$ и делит ребро BD в отношении $1:3$. В каком отношении эта плоскость делит ребро CD?

3.32. На диагоналях смежных граней куба, лежащих на скрещивающихся прямых, найдите две такие точки K и L, чтобы прямая KL была параллельна грани куба. В каких границах лежит длина отрезка KL в кубе с ребром 1?

3.33. Докажите, что отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противолежащих граней, пересекаются в одной точке и делятся в отношении $3:1$.

3.34. Плоскость, двигаясь параллельно самой себе, пересекает правильный тетраэдр, ребро которого равно 1. Докажите, что периметр сечения меньше 3.

■ Перпендикулярность прямых и плоскостей

А

3.35. Боковые ребра пирамиды равны между собой. Докажите, что высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной вокруг основания пирамиды.

3.36. Апофемы боковых граней пирамиды (высоты боковых граней, проведенные к сторонам, лежащим в основании) равны между собой. Докажите, что высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание пирамиды.

3.37. Точка A лежит в плоскости α; ортогональная проекция отрезка AB на эту плоскость равна 1; отрезок AB равен 2. Найдите расстояние от точки B до плоскости α.

3.38. Изобразите общий перпендикуляр скрещивающихся ребер:

а) куба;

б) правильной треугольной призмы[1].

3.39. Через каждую точку прямой проводятся прямые, перпендикулярные одной плоскости. Докажите, что все они лежат в одной плоскости.

3.40. Точка O — центр симметрии параллелограмма $ABCD$. Точка P не лежит в плоскости параллелограмма; $PA = PC$, $PB = PD$. Докажите, что отрезок PO перпендикулярен плоскости параллелограмма.

3.41. Прямые a и b пересекаются в точке P. Через эту точку проведены плоскости, перпендикулярные этим прямым. Докажите, что линия пересечения этих плоскостей перпендикулярна плоскости, которая содержит данные прямые.

3.42. Дан ромб $ABCD$, точка M не лежит в его плоскости; $AM = MB = MC$; прямая DM перпендикулярна плоскости ABC. Найдите углы ромба.

3.43. Правильные треугольники ABC и ADC лежат в перпендикулярных плоскостях. Сторона AC равна единице. Найдите BD.

---

[1] *Правильная призма* — это прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник.

3.44. В правильной четырехугольной пирамиде две противоположные грани перпендикулярны. Докажите, что две другие противоположные боковые грани тоже взаимно перпендикулярны.

3.45. $ABCD$ — прямоугольник, расположенный в плоскости α, точка P не принадлежит α, причем $PD \perp \alpha$. Докажите, что прямая пересечения плоскостей ABP и CPD перпендикулярна плоскости APD.

Б

3.46. Нарисуйте и вычислите высоту тетраэдра $PABC$, если ребро PB равно 1, а все остальные ребра равны 2. Как изменится рисунок, если ребро PB будет равно: а) 3; б) 10?

3.47. Нарисуйте и вычислите высоту тетраэдра $PABC$, если ребро AC равно 3, а все остальные ребра равны 2. Как изменится рисунок, если ребро BC будет равно: а) 3; б) 4?

3.48. Нарисуйте высоту четырехугольной пирамиды $PABCD$, если все ее боковые ребра равны, а в основании лежит равнобочная трапеция с большим основанием, равным 2, и углом при основании 60°.

В

3.49. В основании пирамиды $MABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$, диагонали которого AC и BD перпендикулярны и равны. Основание высоты совпадает с точкой A, а боковые ребра MB , MC и MD равны между собой. Найдите углы при вершинах четырехугольника $ABCD$.

3.50. Катеты равнобедренного прямоугольного треугольника расположены в перпендикулярных плоскостях. Гипотенуза треугольника равна 2, расстояние от одной вершины до линии пересечения плоскостей равно 1. Найдите расстояние от другой вершины до линии пересечения плоскостей.

3.51. Существует ли четырехугольная пирамида с выпуклым основанием, у которой две боковые противоположные грани перпендикулярны основанию?

3.52. Существует ли четырехугольная пирамида с невыпуклым основанием, у которой две противоположные боковые грани перпендикулярны основанию?

■ Расстояния

А

3.53. Правильный треугольник со стороной d лежит в плоскости α, точка X не принадлежит плоскости α и удалена от двух его сторон на расстояние d, а от третьей стороны — на $d\sqrt{3}$. Найдите расстояние от точки X до плоскости треугольника.

3.54. Вычислите высоту тетраэдра, в основании которого лежит правильный треугольник со стороной, равной 1, если его вершина удалена от двух вершин основания на расстояние, равное 1, а от третьей — на расстояние $\sqrt{2}$.

3.55. В треугольной пирамиде боковые ребра равны 5, расстояние от вершины до основания равно 4. Найдите радиус окружности, описанной около основания.

3.56. Прямая проходит через точку окружности радиуса r. Проекция этой прямой на плоскость окружности — прямая, которая касается окружности. Найдите расстояние от прямой до центра окружности.

3.57. Все вершины правильного тетраэдра с ребром, равным 4, равноудалены от некоторой плоскости. Найдите расстояния, на которые они удалены. (Возможны два варианта.)

Б

3.58. Плоскость, пересекающая отрезок AB, делит его в отношении $7:5$, считая от точки B. Найдите расстояние от точки A до плоскости, если расстояние от середины отрезка до этой плоскости равно 4.

3.59. Найдите расстояние от вершины куба до диагонали куба, не проходящей через эту вершину, если ребро куба равно a.

3.60. Два круга радиусом, равным 1, расположены в параллельных плоскостях; расстояние между этими плоскостями равно 1. Найдите расстояние между кругами, если расстояние между центрами кругов равно: а) 2; б) 3.

3.61. Два полукруга с общим диаметром AB лежат в перпендикулярных плоскостях. Из точки A по одной полуокружности и из точки B по другой с равными скоростями начинают двигаться точки. Найдите наименьшее и наибольшее значения расстояния между ними.

3.62. Точка K равноудалена от всех сторон треугольника, а точка L равноудалена от всех его вершин. Какая из точек ближе к плоскости треугольника, если расстояние от точки K до сторон равно расстоянию от точки L до вершин?

В

3.63. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = a$, $\angle B = \alpha$. Расстояние от точки M до плоскости треугольника также равно a. Точка M_1 — проекция точки M на плоскость треугольника — является точкой пересечения медиан треугольника. Найдите расстояния от точки M до вершин и сторон треугольника.

3.64. Какое существует наибольшее число точек в пространстве, чтобы любые две из них находились на расстоянии, равном 1?

■ Теорема о трех перпендикулярах. Угол между прямой и плоскостью

А

3.65. В вершине B равнобедренного треугольника ABC восстановлен перпендикуляр к плоскости треугольника, на котором на расстоянии h расположена точка D. Найдите расстояние от точки D до прямой AC, если $AB = BC = a$, $AC = b$.

3.66. В треугольной пирамиде $SABC$ в основании лежит прямоугольный треугольник ABC, у которого угол B — прямой, угол A равен 30°, а гипотенуза $AC = 5$. Боковое ребро SB перпендикулярно основанию и равно $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. Найдите расстояние от вершины S до прямой AB.

3.67. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ в основании лежит правильный треугольник со стороной a. Высота пирамиды равна h. Найдите угол между прямой AC и плоскостью BSC.

3.68. В прямом параллелепипеде в основании лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами a и b. Боковое ребро $AA_1 = h$. Найдите углы:

а) между диагональю A_1C и плоскостью основания;

б) между диагональю A_1C и боковыми гранями BB_1C и DD_1C_1.

3.69. В основании треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, у которого угол C — прямой. Угол между катетом и боковой гранью AA_1C_1C равен 30°. Найдите двугранный угол между основанием и этой боковой гранью.

Б

3.70. Существует ли пирамида, в основании которой лежит равнобедренная трапеция, расстояние от вершины пирамиды до всех сторон трапеции равно 11, а основания трапеции равны соответственно 18 и 32?

3.71. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна a. Высота пирамиды равна h. Найдите угол между плоскостями BSC и DSC.

3.72. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ в основании лежит прямоугольник $ABCD$. Углы между ребром AS пирамиды и соседними сторонами основания равны α. Найдите угол наклона этого ребра к основанию пирамиды.

3.73. На одной из граней двугранного угла взяты две точки, которые удалены от второй грани на расстояния a и b соответственно. Первая точка удалена от ребра на расстояние d. Найдите расстояние от второй точки до ребра.

3.74. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит трапеция, у которой один из углов при основании прямой, а второй равен 60°. Средняя линия трапеции равна a. Вершина пирамиды равноудалена от сторон основания на расстояние d. Найдите высоту пирамиды.

B

3.75. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ со стороной основания a и высотой h найдите угол между стороной основания AC и плоскостью BSC.

3.76. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат со стороной a, а одно из ребер SB является ее высотой, также равной a. Найдите двугранный угол между плоскостями ASD и CSD.

3.77. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между сечениями AB_1C_1D и CB_1A_1D.

■ Проектирование

A

3.78. Какой может быть проекция на плоскость:

а) двух параллельных прямых;

б) двух скрещивающихся прямых?

3.79. Придумайте фигуру, при проецировании которой на три взаимно перпендикулярные плоскости получаются круг, квадрат и треугольник.

3.80. Могут ли квадрат и прямоугольник быть проекциями на одну и ту же плоскость двух квадратов, лежащих в одной плоскости?

3.81. Могут ли два треугольника с равными площадями проецироваться в треугольники с разными площадями?

3.82. Может ли проекция равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) быть равнобедренным треугольником $A_1B_1C_1$ ($A_1B_1 = A_1C_1$)?

3.83. Какие фигуры могут быть спроецированы:

а) в отрезок;

б) луч;

в) треугольник;

г) параллелограмм;

д) трапецию?

3.84. Сохраняются ли при параллельном проецировании свойства фигуры:

а) центральная симметрия;

б) симметрия относительно прямой?

3.85. Проекции линии на две пересекающиеся плоскости — прямые. Является ли сама линия прямой? А если прямой является проекция всего на одну плоскость?

3.86. Может ли при параллельном проецировании проекцией куба быть квадрат?

Б

3.87. Может ли проекция треугольной пирамиды быть:

а) параллелограммом;

б) квадратом?

3.88. Может ли проекция n-угольной пирамиды быть:

а) $(n - 1)$-угольником;

б) $(n - 2)$-угольником?

3.89. Может ли проекция правильной n-угольной призмы быть:

а) прямоугольником;

б) квадратом;

в) параллелограммом?

При каких условиях?

3.90. Дано изображение правильного треугольника. Проведите на нем высоты и перпендикуляры, опущенные из середин сторон на соседние стороны.

3.91. Одна из диагоналей куба с ребром, равным 1, параллельна плоскости α. В каких границах изменяются длины проекций остальных его диагоналей на эту плоскость?

3.92. Дан правильный тетраэдр. Нарисуйте проекцию:

а) одной его грани на плоскость другой грани;

б) его сечения, являющегося квадратом, на одну из его граней;

в) тетраэдра на плоскость, перпендикулярную его ребру;

г) тетраэдра на плоскость, перпендикулярную прямой, соединяющей середины скрещивающихся ребер.

3.93. Докажите, что последовательное проецирование точки на две взаимно перпендикулярные плоскости приводит к проецированию на линию их пересечения.

3.94. Дано изображение прямоугольного треугольника с отношением катетов $3:4$. Изобразите центры вписанной и описанной окружностей.

3.95. Дано изображение трех последовательных вершин правильного шестиугольника. Изобразите оставшиеся три.

B

3.96. Две прямые a и b скрещиваются. На прямой a отмечен отрезок AB. Через прямую b проводятся всевозможные плоскости, и на каждую из этих плоскостей проецируется отрезок AB. Есть ли среди них такая плоскость, проекция на которую является наименьшей? Как ее построить?

3.97. Используя параллельное проецирование, докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

3.98. Используя параллельное проецирование, докажите, что точки пересечений диагоналей трапеции, продолжений боковых сторон трапеции и середины оснований лежат на одной прямой.

3.99. На изображении прямоугольного треугольника с острым углом $60°$ постройте изображение биссектрис внутреннего и внешнего углов при вершине этого острого угла.

3.100. Дано изображение квадрата. Постройте изображение:

а) биссектрис углов между диагоналями;

б) перпендикуляров, опущенных из середин сторон на диагонали;

в) биссектрис углов между стороной и диагональю квадрата.

3.101. Дано изображение равнобедренного треугольника, высота которого равна основанию. Постройте изображение высоты этого треугольника и центра описанного круга.

Изображение пространственных фигур и построение сечений

A

3.102. Найдите ошибки в построенном сечении (рис. 1). Выберите три вершины сечения и постройте правильную четвертую.

3.103. Какими многоугольниками могут быть сечения куба?

3.104. В правильном тетраэдре проведено сечение плоскостью, параллельной двум скрещивающимся ребрам. Докажите, что четырехугольник в таком сечении будет прямоугольником.

3.105. Нарисуйте тетраэдр. На двух его противоположных ребрах возьмите по точке, соедините их. Постройте два сечения тетраэдра, которые содержат полученный отрезок.

3.106. Постройте прямую пересечения плоскостей KLM и PQR (рис. 2).

3.107. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, точка Q — центр грани ABC, точка K — середина ребра AB. Нарисуйте сечения тетраэдра плоскостями:

а) APQ; б) KPQ.

Постройте общий отрезок этих сечений.

3.108. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через:

а) две вершины и точку на ребре, не содержащем эти вершины;

б) вершину и две точки на ребрах, не проходящих через эту вершину;

в) три точки на трех ребрах, выходящих из одной вершины;

г) середины трех ребер, не выходящих из одной вершины.

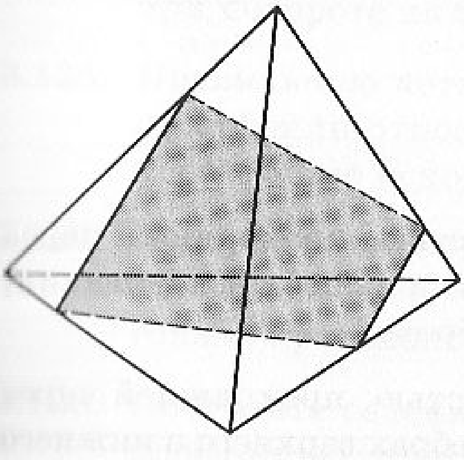


Рис. 1

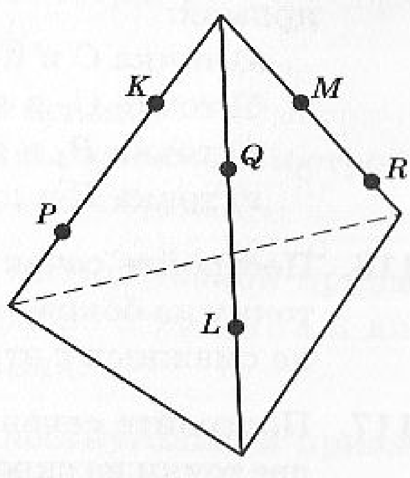


Рис. 2

3.109. В четырехугольной пирамиде все ребра равны. Докажите, что ее сечение, проходящее через вершину пирамиды и диагональ основания, является прямоугольным треугольником.

3.110. Каким по форме должно быть изображение сечения треугольной пирамиды, проходящее через середины трех ребер, не выходящих из одной вершины?

3.111. Куб пересекают плоскостями, которые перемещаются вдоль перпендикулярной им прямой. Какие последовательности многоугольников могут при этом получаться (по количеству сторон)? Может ли, например, получиться последовательно четырех-, пяти- и четырехугольник?

Б

3.112. Изобразите многогранник, у которого все грани — четырехугольники с непараллельными сторонами.

3.113. Изобразите многогранник с гранями — треугольниками, но не тетраэдр.

3.114. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр. Нарисуйте две прямые, которые проходят:

а) через точку P перпендикулярно ребру AC;

б) через точку C перпендикулярно ребру PB;

в) через точку K — середину отрезка BC перпендикулярно PA;

г) перпендикулярно прямым PC и AB.

3.115. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нарисуйте прямые, которые проходят через указанную точку перпендикулярно указанной прямой:

а) точка C и прямая C_1D_1;

б) точка C_1 и прямая BD;

в) точка B_1 и прямая AC;

г) точка B и прямая B_1D.

3.116. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точку на боковом ребре и две точки на ребрах основания, не смежных с этим боковым ребром.

3.117. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через две точки на скрещивающихся ребрах верхнего и нижнего оснований и точку на ребре:

а) пересекающемся с ними;

б) пересекающемся только с одним из этих ребер.

3.118. Постройте сечение четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через три точки на боковых ребрах.

3.119. Постройте пересечение куба и его образа при повороте на 45° около прямой, проходящей через центры противоположных граней.

3.120. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки на двух ребрах и центр тяжести тетраэдра, т. е. точку пересечения отрезков, соединяющих вершину с точкой пересечения медиан противоположной грани.

3.121. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей параллельно двум диагоналям и через середину одного из ребер.

3.122. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через две точки на одной боковой грани, одинаково удаленные от верхнего основания, и точку на нижнем основании.

3.123. Постройте сечение правильного тетраэдра плоскостью, проходящей через центры двух боковых граней и середину высоты основания.

3.124. Изобразите общий перпендикуляр скрещивающихся прямых:

а) диагонали куба и диагонали его грани;

б) диагонали и ребра куба.

В

3.125. Постройте пересечение правильного тетраэдра и его образа при повороте на 60° около высоты.

3.126. Правильную четырехугольную пирамиду симметрично отобразили относительно середины высоты. Постройте пересечение исходной пирамиды и ее образа.

3.127. Постройте сечение правильной пятиугольной призмы плоскостью, проходящей через ребро основания и диагональ противоположного основания.

3.128. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через ребро основания и точку на боковом ребре.

3.129. Постройте изображение многогранника, который получается из куба «отрезанием» двух треугольных пирамид, образованных ребрами, выходящими из диаметрально противоположных вершин куба. Эта фигура называется треугольной антипризмой. Попробуйте нарисовать четырех-, пятиугольную антипризму. Пятиугольная антипризма является частью правильного многогранника — додекаэдра.

3.130. Постройте сечение правильной треугольной пирамиды плоскостью, параллельной боковому ребру и проходящей через медиану основания.

3.131. Постройте сечение правильной треугольной пирамиды плоскостью, параллельной боковой грани и проходящей через центр основания.

3.132. Высота пирамиды в два раза больше стороны основания. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ плоскостью, проходящей через вершину A перпендикулярно ребру:

а) PC;

б) PD.

Матричные тесты

■ Взаимное расположение прямых и плоскостей ■ Изображение пространственных фигур

■ Взаимное расположение прямых и плоскостей

А

3.133. Будем использовать следующие обозначения для возможного расположения прямых в пространстве:

$a \circledparallel b$ — прямые a и b параллельны;

$a \otimes b$ — прямые a и b пересекаются;

$a \oslash b$ — прямые a и b скрещиваются.

Что можно сказать о расположении прямых b и c при выполнении указанных условий (ответ не обязательно единственный)?

Условие	$b ⦷ c$	$b \otimes c$	$b \oslash c$
$a ⦷ b,\ a \oslash c$			
$a \otimes b,\ a \oslash c$			
$a ⦷ b,\ a \otimes c$			
$a \otimes b,\ a \otimes c$			
$a ⦷ b,\ a ⦷ c$			

Б

3.134. В кубе соединили центры граней и получили тело $PABCDQ$, называемое октаэдром (рис. 3). Отметьте взаимное расположение указанных прямых и плоскостей.

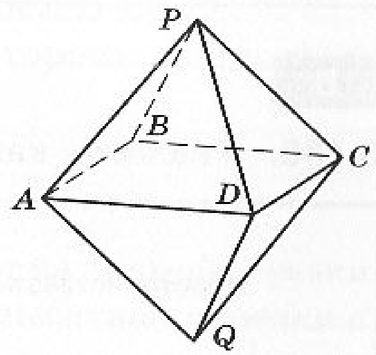


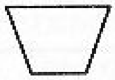
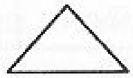
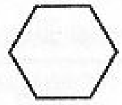
Рис. 3

Расположение прямых и плоскостей	$\parallel$	$\perp$	Образуют угол, отличный от 0 и 90°
Прямая PQ и плоскость $ABCD$			
Плоскости ABD и QBC			
Прямая AB и плоскость DCQ			
Плоскости ABD и BPC			
Плоскости APC и BPD			
Прямые AB и CQ			

Изображение пространственных фигур

Б

3.135. Укажите, какие из нарисованных плоских фигур могут быть изображениями указанных пространственных фигур.

Пространственная фигура	Плоская фигура			
				
Куб				
Треугольная пирамида				
Четырехугольная пирамида с произвольным основанием				
Прямоугольный параллелепипед				
Пятиугольная пирамида				

В

3.136. Укажите, какие фигуры обладают указанным свойством.

Пространственная фигура	Существует точка, равноудаленная от всех		
	ребер	граней	вершин
Куб			
Правильный тетраэдр			
Пирамида с квадратом (сторона 1) в основании и высотой длины 1, совпадающей с боковым ребром			
Правильная треугольная призма с ребром основания в два раза меньшим, чем боковое			

3.137. Какая точка изображения фигуры может служить изображением ее центра тяжести?

Исходная фигура — треугольник	Изображение центра тяжести		
	Середина стороны	Точка пересечения высот	Точка пересечения срединных перпендикуляров
Правильный			
Прямоугольный			
Остроугольный, но правильный			

Самостоятельные работы

■ Взаимное расположение прямых и плоскостей ■ Расстояния ■ Изображения фигур

■ Взаимное расположение прямых и плоскостей

А

3.138. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a точки K и F — середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно, а M — точка пресечения диагоналей грани A_1D_1DA.

а) Изобразите сечение куба плоскостью KFM.

б) Найдите длину наибольшей стороны этого сечения.

Б

3.139. Три параллельные плоскости высекают на прямой отрезки длиной 3 и 7. На другой прямой они высекают отрезки d и 14. Найдите d.

В

3.140. Прямые AB и CD скрещиваются. Точки X и Y принадлежат прямой AB, точка Z пробегает все точки прямой CD. Найдите множества середин отрезков XZ и YZ, а также их пересечение.

■ Расстояния

А

3.141. Плоскости равных треугольников ABC и ACD перпендикулярны, $AB = 4$, $AC = 5$, угол BAC равен 60°. Найдите расстояние между B и D.

3.142. Вершины A и D параллелограмма $ABCD$ лежат в плоскости α, а две другие — вне этой плоскости; $AB = 15$, $BC = 19$. Проекции диагоналей параллелограмма на плоскость α равны 20 и 22. Найдите расстояние от стороны BC до плоскости α.

Б

3.143. Пусть $ABCD$ – прямоугольник. Отрезок AE перпендикулярен плоскости ABC; $BE = 15$, $DE = 20$, $CE = 24$. Докажите, что треугольник EDC прямоугольный и найдите AE.

3.144. Плоскость квадрата $ABCD$ со стороной, равной 4, перпендикулярна плоскости треугольника AKB. Известно, что $AK = BK = 2\sqrt{6}$.
Определите: а) угол между BC и AK; б) угол между KC и плоскостью квадрата; в) расстояние от точки B до плоскости KDC.

В

3.145. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание $ABCD$ – квадрат со стороной 5. Расстояние между BC и AC_1 равно 4. Найдите AC_1 и изобразите на рисунке общий перпендикуляр этих прямых.

3.146. Точка M удалена от каждой стороны равнобедренной трапеции на расстояние 14. Основания трапеции равны 18 и 32. Найдите расстояние от M до плоскости трапеции.

■ Изображения фигур

А

3.147. Какой может быть проекция двух скрещивающихся прямых на плоскость?

Б

3.148. Изобразите ромб с углом 60° и перпендикуляром, опущенным на сторону из точки пересечения диагоналей.

В

3.149. Изобразите равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны равны 4, основание равно 5, и укажите центр вписанной в него окружности.

Контрольные тесты с выбором ответа

А

3.150. Медиана треугольника делит этот треугольник на два равнобедренных. Сколько плоскостей можно провести через эту медиану, ортоцентр и центр тяжести данного треугольника?

а	б	в	г
Ни одной	Одну	Бесконечно много	Это зависит от дополнительных условий

3.151. Расстояние между параллельными плоскостями α и β равно 7, а расстояние между прямой a, принадлежащей плоскости α, и прямой b, принадлежащей плоскости β, равно 8. Каково может быть расположение прямых a и b?

а	б	в	г
Параллельны или скрещиваются	Параллельны	Скрещиваются	Такого не бывает

3.152. В тетраэдре $DABC$ $AC = BC = AB = 3$; $AD = 7$; $BD = 5$. Сколько плоскостей, перпендикулярных прямой DC, можно провести через прямую AB?

а	б	в	г
Ни одной	Одну	Бесконечно много	Это зависит от дополнительных условий

3.153. Два равнобедренных треугольника, не лежащие в одной плоскости, с общим основанием длины 24 имеют боковые стороны 13 и 20 соответственно. Каким числом может быть расстояние между их вершинами?

а	б	в	г
Любым от 0 до 16	Любым от 5 до 16	Любым от 11 до 21	Любым

3.154. Проекцией трапеции на плоскость может быть:

а	б	в	г
Квадрат	Ромб	Треугольник	Отрезок

3.155. Какой из следующих правильных многоугольников не может получиться в сечении куба?

а	б	в	г
Треугольник	Квадрат	Пятиугольник	Шестиугольник

Б

3.156. В пространстве проведено n прямых. Они не проходят через одну точку, но попарно пересекаются. Сколько различных плоскостей можно провести через пары этих прямых?

а	б	в	г
Ни одной	Одну	n	$\frac{n(n-1)}{2}$

3.157. Правильный тетраэдр пересекли плоскостью, параллельной двум скрещивающимся ребрам. Ребро тетраэдра равно 1. Каким мог получиться периметр сечения?

а	б	в	г
4	2	0,5	Любым от 0 до 4

3.158. Прямая l образует равные углы с несколькими прямыми в данной плоскости. Сколько таких прямых должно быть, чтобы l оказалась перпендикулярна этой плоскости?

а	б	в	г
1	2	3	4

3.159. Расстояния от двух концов отрезка до плоскости равны 1 и 3. Чему может быть равно расстояние от середины отрезка до этой плоскости?

а	б	в	г
2	1,5	Любому числу от 0 до 2	5

В

3.160. Площадь основания прямой призмы равна S_1, а площадь сечения плоскостью, не параллельной основанию, равна S_2. Каким может быть отношение $\frac{S_1}{S_2}$?

а	б	в	г
1	2	$\frac{1}{5}$	Любым числом, бо́льшим 1

3.161. Параллельная проекция куба на некую плоскость — прямоугольник. Сколько вершин куба могли спроецироваться в вершины прямоугольника?

а	б	в	г
2	4	6	7

3.162. Пусть M — середина ребра AB пирамиды $ABCD$, а точка N делит ребро AC в отношении $1:2$, считая от вершины A. Сколько прямых, параллельных MN, можно провести в плоскости грани BCD?

а	б	в	г
2	1	0	Бесконечно много

3.163. Прямая DF пересекает плоскости α, β, γ в точках D, E, F соответственно, причем $DE = 3$, $FE = 9$. Прямая EG пересекает плоскости α и γ в точках G и H соответственно, причем $EG = 12$. Какие значения может принимать GH?

а	б	в	г
3 и 4	3 и 6	4 и 6	6 и 8

3.164. Расстояния от вершин треугольника до плоскости равны 1, 2 и 3. Чему может быть равно расстояние от точки пересечения медиан треугольника до этой плоскости?

а	б	в	г
1,5	1	Любому числу от 0 до 3	2

3.165. Шесть вершин куба с ребром 1 равноудалены от плоскости α. Какой может быть сумма расстояний от остальных двух вершин до этой плоскости?

а	б	в	г
$\sqrt{3}$	2	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	6

3.166. В треугольной пирамиде с данным основанием вершина равноудалена от прямых, содержащих стороны основания. Проекции всех таких вершин на плоскость треугольника образуют множество M. Сколько точек содержит множество M?

а	б	в	г
1	2	4	Бесконечно много

3.167. Наибольшая площадь сечения куба с ребром 1 равна:

а	б	в	г
1	$\sqrt{3}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	2

ГЛАВА 4

Комбинаторика

Тренажеры

■ Правило произведения ■ Размещения и перестановки ■ Сочетания ■ Многочлены ■ Геометрические конфигурации

■ Правило произведения

A

4.1. *Числа и буквы*. Имеем алфавит из 15 букв, из которых 10 согласные и 5 гласные, а также 10 цифр. Каким количеством способов можно образовать следующие комбинации:

1) выражение, состоящее из одной буквы и двух произвольных цифр (например, A05);

2) слово из двух букв, ровно одна из которых согласная;

3) слово из трех произвольных букв;

4) выражение, состоящее из двух букв и четырех цифр (в любой последовательности);

5) выражение из 6 знаков с чередующимися буквами и цифрами, начинающееся с цифры;

6) выражение из 8 символов, с различными цифрами на 3-м и 5-м местах;

7) слово из 5 букв, в которых рядом стоящие буквы различны;

8) число из 5 цифр, оканчивающееся не нулем и кратное 2 (первая цифра может быть нулем);

9) последовательность из 6 знаков, среди которых встречается не более одной гласной;

10) фраза, состоящая из трех слов, каждое из которых имеет 5 букв?

4.2. Сколько можно составить слов из трех букв латинского алфавита, вторая буква в которых гласная.

4.3. Сколько существует восьмизначных чисел, в которых каждая следующая цифра больше предыдущей (при прочтении слева направо)?

4.4. Код сейфа полковника Кудасова состоит из названия месяца и четырехзначного номера — года XX века. Сколько различных кодов можно придумать?

4.5. Сколько можно построить последовательностей из десяти символов, каждый из которых 0 или 1?

4.6. Из города А в город В ведут четыре дороги, а из города В в город С — пять дорог. Сколько путей, проходящих через город В, ведут из города А в город С?

4.7. В одном классе 20 учеников, в другом — 25. Каким числом способов можно выбрать по одному представителю от каждого класса?

4.8. На одной полке шкафа стоит 8 книг, на другой — 10, на третьей — 12. Каким числом способов можно выбрать по одной книге с каждой полки?

4.9. В ящике лежат 6 ножей, 6 вилок и 10 ложек. Каким числом способов можно выбрать набор из одного ножа, одной вилки и одной ложки?

4.10. Футбольный матч имеет три возможных исхода для одной команды — выигрыш, проигрыш, ничья. Сколько разных последовательностей исходов встреч может иметь команда за четыре матча?

4.11. У светофора три секции. Каждая из них может либо гореть, либо нет, независимо друг от друга (например, могут одновременно гореть все три секции).

1. Сколько может быть различных состояний одного светофора?
2. На перекрестке висит четыре светофора, положения которых не зависят друг от друга. Сколько может быть различных состояний у всей системы?

4.12. В классе 24 человека. На каждый из 7 дней назначается один дежурный, причем каждый раз он выбирается из 24 человек. Каким числом способов это можно сделать?

4.13. Человек идет по городу и на каждом перекрестке может пойти по одной из трех дорог. Сколько разных маршрутов он мог пройти, если он пересекал 10 перекрестков?

4.14. Игральный кубик с шестью гранями бросили подряд три раза. Сколько последовательностей результатов получается при таком бросании?

4.15. В одной команде 6 борцов, в другой — 8. Каким числом способов можно выбрать соперников для первого боя?

4.16. Человек пишет поздравление на открытке, вкладывает ее в конверт и наклеивает марку. У него 10 разных открыток, 7 разных конвертов и 10 разных марок. Каким числом способов он может составить поздравление?

Б

4.17. Сколько существует трехзначных чисел, в которых вторая цифра — сумма первой и третьей?

4.18. Во флоте раньше применяли семафор с двумя флажками. Различных положений каждого флажка — 5.

1. Сколько различных сигналов можно передать за один взмах флажками?
2. Сколько различных сообщений можно зашифровать и передать тремя взмахами флажков?

4.19. Пять человек независимо друг от друга садятся в поезд метро, имеющий шесть вагонов. Каким числом способов они могут это сделать?

4.20. Пятеро школьников играют в баскетбол один раз в день всю неделю. Каждый раз один из них был капитаном, причем нельзя быть капитаном два дня подряд. Сколькими способами можно построить последовательность капитанов?

4.21. Три Карлсона могут попробовать по три сорта варенья (всего 10 сортов). Сколькими способами это можно сделать?

4.22. Сколько существует шестизначных чисел:

1) оканчивающихся на нечетную цифру;
2) не содержащих в записи цифры 5 и 9;
3) содержащих ровно два нуля;

4) содержащих хотя бы два нуля;
5) содержащих хотя бы две цифры 6;
6) начинающихся двумя одинаковыми цифрами;
7) содержащих в записи только четные цифры.

4.23. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два поля разного цвета?

4.24. В одном ведре стоит 10 роз, в другом — 12 гладиолусов.
1. Каким числом способов можно выбрать по одному цветку из каждого ведра?
2. Из одного из ведер взяли один цветок. После этого Маша должна выбрать по одному цветку из каждого ведра. Когда у нее будет больший выбор — если взяли одну розу или взяли один гладиолус?

4.25. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых не встречается цифра 5?

В

4.26. 1. Найдите количество делителей чисел:
а) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$;
б) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^5$;
в) 10 000.
2. Найдите количество нечетных делителей у чисел п. 1.
3. Найдите количество делителей, кратных 10.

4.27. 1. Выпишите все делители одночлена a^5.
2. Выпишите все делители одночлена a^3b^2.
3. Сколько делителей имеет одночлен $a^3b^2c^2$?

4.28. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых хотя бы один раз встречается цифра 5?

4.29. Каким количеством способов можно положить шесть одинаковых монет в три коробки так, чтобы ни одна коробка не оказалась пустой?

4.30. Сколько существует семизначных чисел, кратных 5?

4.31. На балу веселятся 20 кавалеров и 25 дам. Этикет не позволяет даме танцевать с одним кавалером два танца подряд. Сколькими способами кавалеры могут пригласить дам на три танца подряд так, чтобы каждая дама танцевала хотя бы два танца?

■ Размещения и перестановки

А

4.32. Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно составить из букв слова: а) САЛАТ; б) ПОТОП; в) АНАНАС?

4.33. Экзамен состоит из пяти задач, которые можно решать в любом порядке. Сколькими способами можно расставить задачи?

4.34. В алфавите из 15 букв: 10 согласных и 5 гласных, а также 10 различных цифр. Каким количеством способов можно образовать следующие комбинации:
1) слово из четырех различных букв;
2) число из трех различных цифр (первая цифра может быть нулем);
3) анаграмма слова СЕКУНДА;
4) восьмибуквенное слово из различных букв с чередующимися гласными и согласными;
5) слово из не более чем четырех букв, причем все буквы различны;
6) анаграмма слова СЕКУНДА, не содержащая трех гласных подряд;
7) трехзначное число, составленное из различных нечетных цифр;
8) двузначное число, кратное 6;
9) трехзначное число, кратное 15;
10) шифр, при котором каждой из пяти шифруемых букв сопоставляется двузначное число из нечетных цифр;
11) сколько существует трехзначных чисел, в записи которых цифры 1, 2, 3 встречаются ровно по одному разу;
12) сколькими способами можно выложить в ряд красный, черный, синий и зеленый шарики;
13) сколько различных, не обязательно осмысленных, слов можно получить, переставляя буквы слова МЫСЛЬ;
14) анаграмма (нетождественная) слова НАГАН.

4.35. На полке стоят пять книг. Сколькими способами можно выложить в стопку несколько из них (стопка может состоять и из одной книги)?

4.36. Каким количеством способов можно переставить буквы в слове КАНАВА?

4.37. На собрании присутствуют 20 человек. Из них нужно выбрать председателя собрания, его заместителя и секретаря. Каким количеством способов это можно сделать?

4.38. В классе 15 учеников. Есть шесть различных билетов, которые нужно раздать в классе (один ученик получает не более одного билета). Каким количеством способов это можно сделать?

4.39. Каким количеством способов можно поставить на шахматную доску четыре разные фигуры?

4.40. На фортепьяно 88 клавиш. Сколькими способами можно составить мелодию, нажимая каждую клавишу по одной за раз?

4.41. Каким количеством способов восемь кавалеров могут пригласить на танец восемь дам?

Б

4.42. Каждый из трех человек выбирает себе из буфета чашку, блюдце и чайную ложку. Каким количеством способов они могут вместе накрыть чайный стол, если всего в буфете 7 чашек, 5 блюдец и 6 ложек?

4.43. У экзаменатора 8 различных задач. Каждый раз в течение семи пересдач он предлагает нерадивому студенту решить одну из них. Каким количеством способов это можно сделать? А если пересдач будет восемь? шесть?

4.44. Каким количеством способов можно сшить трехцветный флаг с тремя горизонтальными полосами разного цвета, если имеется материя восьми цветов?

4.45. В команде шесть бегунов. Из них надо выбрать команду для бега 4×400 м и расставить участников по этапам. Каким количеством способов это можно сделать?

4.46. В соревновании участвовало 10 спортсменов. Было разыграно три медали — золотая, серебряная и бронзовая. Каким количеством способов могут распределиться награды?

4.47. Сколькими способами можно поставить восемь ладей на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

4.48. Алиса, Болванщик, Мартовский Заяц и Соня обедают вместе каждую пятницу за столом с занумерованными местами. При этом они не хотят повторять свою рассадку за столом. Через сколько недель им придется пересмотреть условие встреч?

В

4.49. Каким количеством способов можно расставить на шахматной доске два белопольных слона так, чтобы они не били друг друга?

4.50. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске двух небьющих друг друга ферзей?

4.51. Каким количеством способов можно расставить на полке три собрания сочинений из пяти, шести и восьми томов? Тома одного собрания должны стоять рядом, но порядок томов (как и порядок собраний сочинений) может быть произвольным.

4.52. Сколькими способами можно выбрать из колоды в 36 карт последовательность из четырех карт различных мастей и достоинства?

4.53. Сколькими способами можно выбрать из колоды в 36 карт последовательность из четырех карт одной масти?

4.54. Из мешка, содержащего 90 бочонков лото, выбирают подряд два бочонка. Каким количеством способов это можно сделать так, чтобы бочонки были из разных десятков?

4.55. Из цифр 1, 2, 3, 4 составляют два четырехзначных числа с разными цифрами и записывают их друг под другом.
1. Сколько разных комбинаций может получиться?
2. Сколько комбинаций получится таких, у которых цифры, стоящие друг под другом (во всех четырех позициях), будут различны?

4.56. Сколько есть нетождественных анаграмм слова ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ?

4.57. Каким количеством способов можно раздать поровну колоду из 36 карт четырем различным игрокам?

Сочетания

A

4.58. Сколько существует способов поставить четыре ладьи на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

4.59. Сколько существует способов покрасить в два цвета клетчатую доску размером:

1) 2×2 (две раскраски считаются различными, если одна не может перейти в другую с помощью поворота);
2) 1×4;
3) 2×3?

4.60. Сколькими способами можно расположить в ряд семь точек и четыре тире?

4.61. В алфавите 15 букв, из которых 10 согласных и 5 гласных, а также 10 обычных цифр. Каким количеством способов можно образовать следующие комбинации:

1) набор из трех букв;
2) набор из четырех цифр, в котором среди первых двух и вторых двух нет совпадающих;
3) набор из двух букв и трех цифр;
4) последовательность из трех нулей, двух единиц и двух семерок;
5) шестибуквенное слово, составленное из трех букв А и трех букв Б;
6) шестибуквенное слово, составленное из двух произвольных различных гласных букв, причем одна из них повторяется ровно четыре раза;
7) трехзначное число из трех различных цифр, идущих в строго убывающем порядке;
8) четырехбуквенное слово из различных букв, идущих в алфавитном порядке;
9) набор из не менее чем трех и не более чем семи букв.

4.62. Преподаватель выбирает из 25 студентов 7, которые пойдут отвечать первыми. Сколькими способами это можно сделать?

Б

4.63. Сколько существует шестизначных чисел, содержащих:
1) ровно две шестерки;
2) не более двух шестерок;
3) хотя бы две шестерки?

4.64. В стае попугаев 10 красного окраса, 20 зеленого и 7 голубого. Сколькими способами можно рассадить птиц (возможно, не всех) так, чтобы они сидели в следующем порядке: красного окраса — зеленого — голубого?

4.65. Для участия в вечере из пяти певцов выбирают троих. Каким числом способов можно обеспечить выбор певцов на три вечера так, чтобы наборы выступающих в разные дни не совпадали?

4.66. В роте 3 офицера, 7 сержантов и 50 рядовых. Каким количеством способов может быть выбран наряд из одного офицера, двух сержантов и трех рядовых?

4.67. Каким количеством способов можно выбрать из слова ИНТЕГРАЛ две гласные и две согласные буквы?

4.68. Каким количеством способов можно переставить буквы в слове КОРОБОК так, чтобы согласные шли в алфавитном порядке?

4.69. Сколькими способами можно из колоды в 36 карт выбрать три карты одной масти?

4.70. Каким количеством способов можно выбрать две диагонали граней куба, не принадлежащие одной грани?

4.71. Сколькими способами можно выбрать две диагонали граней куба, не лежащие в параллельных плоскостях или в одной плоскости?

4.72. У одного мальчика 10 марок, а у второго 12. Первый меняет свои три марки на две марки второго. Каким количеством способов может быть произведен обмен?

В

4.73. Сколькими способами можно расставить восемь белых и восемь черных шашек на черных полях шахматной доски?

4.74. В классе 25 человек. Сколькими способами можно выбрать троих дежурных по столовой?

4.75. Из 20 видов первого, 7 видов второго и 40 видов третьего блюда составляют меню из восьми различных блюд, в котором должно быть не более трех десертов. Сколькими способами это можно сделать?

4.76. Сколькими способами можно выбрать три различных числа из последовательности 1, 2, 3, ..., 100 так, чтобы они образовали арифметическую прогрессию?

4.77. Каким количеством способов можно выбрать пять человек из группы в восемь человек, но так, чтобы не оказались выбранными вместе Вася и Петя?

4.78. Каким количеством способов можно раздать колоду из 32 карт трем игрокам по 10 карт и оставшиеся две карты положить «в прикуп»?

4.79. Сколькими способами можно выбрать из колоды в 54 карты четыре карты одной масти (джокер считается картой любой масти)?

■ Многочлены

4.80. Вычислите суммы.

А

1) $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (n+1)C_n^n$;

2) $C_n^0 + 3C_n^1 + 5C_n^2 + \ldots + (2n+1)C_n^n$;

3) $\frac{C_n^0}{2} + \frac{C_n^1}{3} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+2}$.

Б

1) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n$;

2) $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \ldots + (-1)^{n-1} nC_n^n$;

3) $\frac{C_n^0}{1} - \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{C_n^n}{n+1}$.

В

1) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$;

2) $(C_n^0)^2 - (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 - \ldots + (-1)^n (C_n^n)^2$;

3) $C_{100}^0 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - \ldots + C_{100}^{100}$.

4.81. **Найдите число членов в разложении до и после приведения подобных членов.**

А

$(a+b)^{10}$.

Б

$(a+b+c)^5$.

В

$(a+b+c+d)^7$.

4.82. **Найдите число n.**

А

$C_n^2 + C_{n+1}^2 = 100$.

Б

$\frac{1}{C_4^n} - \frac{1}{C_5^n} = \frac{1}{C_6^n}$.

В

$C_n^{m+1} : C_n^m : C_n^{m-1} = 5:5:3$.

4.83. **Найдите коэффициент при заданном одночлене X.**

А

1) $(a+b)^5 \quad X = a^3b^2$;
2) $(2a-b)^6 \quad X = a^3b^3$;
3) $(a+2b+3c)^2 \quad X = bc$.

Б

1) $(2a-3b)^7 \quad X = a^2b^5$;
2) $(a+b+c)^3 \quad X = abc$;
3) $(a^2+b^2-c^2)^4 \quad X = a^4b^2c^2$.

В

1) $(a-b)^{10}\ X = a^3b^7$;

2) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^6 \quad X=a^2$;

3) $(a+b+c)^{10} \quad X=a^2b^5c^3$.

Геометрические конфигурации

А

4.84. На окружность нанесены 12 точек.

1. Сколько существует хорд, соединяющих эти точки?
2. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?
3. Сколько существует выпуклых четырехугольников с вершинами в этих точках?
4. Каково максимальное количество точек пересечения хорд внутри круга?

4.85. На одной из двух параллельных прямых взято 8 точек, на другой — 6.

1. Сколько треугольников можно построить с вершинами в этих точках?
2. Сколько можно построить выпуклых четырехугольников с вершинами в этих точках?
3. Каково максимальное число точек пересечения пар отрезков, концы которых лежат на разных прямых?

4.86. 1. Сколько диагоналей можно провести в выпуклом n-угольнике?

2. На прямой взято n точек. Сколько существует отрезков с концами в этих точках?
3. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник размера $m \times n$ со сторонами, идущими по линиям сетки. Сколько прямоугольников можно в нем выделить (со сторонами, идущими по линиям сетки)?
4. Из точки проведено n лучей. Сколько они образуют углов?

4.87. 1. На какое наибольшее число частей разбивают плоскость пять прямых?

2. На какое наибольшее число частей разбивают пространство четыре плоскости?
3. На какое наибольшее число частей разбивают плоскость четыре круга?

Б

4.88. На окружность нанесены n точек.

1. Сколько существует хорд, соединяющих эти точки?

2. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

3. Сколько существует выпуклых четырехугольников с вершинами в этих точках?

4. Каково максимальное число точек пересечения хорд внутри круга?

4.89. На одной из двух параллельных прямых взято m точек, на другой — n.

1. Сколько треугольников можно построить с вершинами в этих точках?

2. Сколько можно построить выпуклых четырехугольников с вершинами в этих точках?

3. Каково максимальное число точек пересечения пар отрезков, концы которых лежат на разных прямых?

4. Сколько можно провести 6-звенных замкнутых ломаных, вершины которых попеременно лежат на двух прямых?

4.90. 1. Каково максимальное число точек пересечения диагоналей выпуклого n-угольника?

2. Ребра параллелепипеда разделены соответственно на m, n и k равных частей. Через точки деления проведены плоскости, параллельные граням параллелепипеда. линии пересечения этих плоскостей образуют трехмерную сетку. Сколько можно построить прямоугольных параллелепипедов с вершинами в узлах этой сетки?

3. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник размера 4×6. Сколько он содержит прямоугольников, включающих один выделенный квадратик?

4.91. 1. На какое наибольшее число частей разбивают плоскость n прямых?

2. На какое наибольшее число частей разбивают пространство n плоскостей?

3. На какое наибольшее число частей разбивают плоскость n кругов?

В

4.92. На какое наибольшее число частей могут разбить плоскость два выпуклых 10-угольника?

4.93. На плоскости проведено n прямых общего положения (никакие две не параллельны, никакие три не проходят через одну точку). Сколько получилось треугольников со сторонами на этих прямых?

4.94. На плоскости задано n точек, из которых p лежат на одной прямой, а кроме них никакие три точки не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

4.95. Каждая сторона квадрата разбита на n частей. Сколько можно построить треугольников с вершинами в точках деления?

4.96. В пространстве даны n точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Через каждые три точки проводится плоскость, причем никакие две из этих плоскостей не параллельны друг другу и никакие три не пересекаются по одной прямой. Найдите максимальное число прямых, получающихся при пересечении этих плоскостей.

4.97. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, длины ребер которых целые числа от 1 до n?

Матричные тесты

4.98. Четыре шара закатываются в три лузы. Укажите верное количество вариантов при выполнении различных условий.

A

Условие	Количество вариантов			
	16	18	45	81
Лузы и шары различные				
Шары различные, хотя бы одна луза пустая				
Шары различные, вторая луза пустая				

Окончание таблицы

Условие	Количество вариантов			
	16	18	45	81
Шары различные, луза либо пустая, либо в нее попадает ровно два шара				

Б

Условие	Количество вариантов			
	15	36	60	42
Шары и лузы различные, пустых луз нет				
Шары и лузы различные, в одной из луз один шар				
Шары и лузы различные, одна луза пустая				
Шары одинаковые, лузы разные				

В

Условие	Количество вариантов			
	5	9	12	6
Шары одинаковые, лузы различные, первая луза пустая				
Шары одинаковые, лузы различные, одна луза пустая				
Шары одинаковые, лузы разные, в одной лузе не может быть двух шаров				
Шары одинаковые, лузы разные, каждая луза или пустая, или в нее попадает четное число шаров				

4.99. В почетной охранной роте 10 мушкетеров короля и 10 гвардейцев кардинала. На каждый из шести дней недели выбирается один, несущий караул у изголовья юного короля (в воскресенье в карауле — сам кардинал). Сколькими способами можно сделать назначение при соблюдении следующих условий?

А

Условие	Количество вариантов			
	$(10\cdot9\cdot8)^2$	$20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15$	10^6	20^6
На каждый день караульный назначается независимо от предыдущих назначений				
Все караульные различны				
В первый день назначается мушкетер, а затем мушкетеры и гвардейцы чередуются				
В первый день назначается гвардеец, а затем мушкетеры и гвардейцы чередуются. Все караульные различны				

Б

Условие	Количество вариантов			
	$(10\cdot9\cdot8)^2$	$2(10\cdot9\cdot8)^2$	$2\cdot10^6$	$5C_{20}^5\dfrac{6!}{2}$
На каждый день караульный назначается независимо от предыдущих назначений, при этом мушкетеры и гвардейцы чередуются				

Окончание таблицы

Условие	Количество вариантов			
	$(10\cdot 9\cdot 8)^2$	$2(10\cdot 9\cdot 8)^2$	$2\cdot 10^6$	$5C_{20}^5\dfrac{6!}{2}$
Мушкетеры и гвардейцы чередуются. Все караульные различны				
Первые три дня в карауле стояли мушкетеры, следующие три дня — гвардейцы				
Ровно один человек был в карауле дважды, остальные не повторялись				

В

Условие	Количество вариантов			
	$C_{20}^3\cdot\left(\dfrac{6!}{2^3}+\dfrac{6!}{3!\cdot 2}+\dfrac{6!}{4!}\right)$	$2(10\cdot 9\cdot 8)^2$	$C_{20}^3\cdot\dfrac{6!}{2^3}$	$2\cdot 10^6$
Мушкетеры и гвардейцы были в карауле ровно по три дня. Караульные могли повторяться				
Мушкетеры и гвардейцы были в карауле ровно по три дня. Все караульные различны				
На одной неделе в карауле были три разных человека, каждый по два дня (не обязательно подряд)				
Разных караульных за неделю было ровно трое				

Самостоятельные работы

■ Правило произведения ■ Размещения и перестановки ■ Сочетания

■ Правило произведения

A

4.100. Сколько разных выражений A можно составить, подставляя вместо букв x и y данные значения?

№ п/п	A	Значения x и y
1	$x + y$	$x = a, b, c, d$ или e $y = m, n$ или p
2	xy	$x = a, b, c, d$ или e $y = m, n, p$ или q
3	$x^2 + y^2$	x и y — одна из букв множества $\{a, b, c, d, e\}$
4	$x^2 + y^2$	x и y — одна из букв множества $\{a, b, c, d, e\}$ при условии, что $x \neq y$
5	$\dfrac{xy}{y-z}$	x, y, z — однозначные натуральные числа, причем выражение A должно иметь смысл
6	xyz	x, y, z — однозначные попарно различные натуральные числа
7	xyz	x, y, z — однозначные натуральные числа, причем A — нечетно
8	xyz	x, y, z — однозначные натуральные числа, причем A — четно

4.101. Из 12 слов мужского, 9 женского и 10 среднего рода надо выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

4.102. На трех полках стоят книги: на одной — 20, на другой — 15 и на третьей — 22. Каким количеством способов можно выбрать по одной книге с каждой полки?

4.103. Сколькими способами можно составить букет из четырех цветков разного цвета, если есть 5 желтых, 7 красных, 9 белых и 10 синих цветков?

Б

4.104. Составляются слова (последовательности символов) из двух алфавитов: буквы *А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И* и цифры 0, 1, 2, ..., 9. В слове символом a обозначается буква, символом x — цифра. Подсчитайте количество слов с указанными ограничениями.

№ п/п	Слово	Ограничение
1	$axxa$	$x \le 5$
2	$xaxa$	x четно
3	$aaxx$	a — гласная
4	$xxaax$	Стоящие рядом символы различны
5	$axxa$	a — согласная, x не делится на 3
6	$xaax$	Цифры берутся различной четности
7	$aaax$	Буквы различны
8	$aaxaa$	Рядом стоящие буквы различны
9	$aaxxx$	Буквы одинаковы, а цифры различны
10	$axxxx$	Цифры различны

4.105. В совет школы надо выбрать по одному представителю от каждого из восьми классов. Сколькими способами это можно сделать, если в школе три класса по 30 человек, три класса по 28 человек и два класса по 32 человека?

4.106. Есть три сорта лимонада, четыре сорта сока и пять сортов минеральной воды. Каким количеством способов можно выбрать напитки так, чтобы напитков одного типа (лимонад, сок, вода) было взято не более одной бутылки?

В

4.107. Код замка — последовательность, состоящая из двух букв и трех цифр. Используется 6 различных букв и 10 различных цифр. Сколько существует разных кодов?

4.108. Сколько делителей у числа $2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^5$?

4.109. Сколько четных делителей у числа $2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^5$?

4.110. Сколько делителей, оканчивающихся на 0, у числа $2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^5$?

■ Размещения и перестановки

А

4.111. Каким количеством способов можно разложить четыре разные монеты в четыре кармана так, чтобы в каждом кармане оказалась ровно одна монета?

4.112. Каким количеством способов можно рассадить восемь человек в ряд из восьми стульев?

4.113. Сколькими способами можно расставить на полке девять разных книг?

Б

4.114. Сколькими способами можно расставить на полке пять трехтомников так, чтобы тома одного трехтомника стояли рядом, хотя возможно и не по порядку томов?

4.115. Случайным образом пишется четырехбуквенное слово из алфавита {А, Б, В, Е}. Сколькими способами можно построить слова со следующими условиями:

1) нет буквы А;
2) все буквы одинаковы;
3) все буквы разные;
4) есть хотя бы одна буква А;
5) буква А встречается ровно один раз?

В

4.116. Случайным образом пишется четырехбуквенное слово из алфавита {А, Б, В, Е}. Сколькими способами можно построить слова со следующими условиями:

1) одинаковые буквы не стоят рядом;
2) первая буква гласная, затем согласные и гласные чередуются;

3) сначала идут две гласные буквы, а затем две согласные;
4) буква А встречается ровно два раза;
5) по краям стоят гласные буквы?

■ Сочетания

А

4.117. Сколькими способами можно составить дозор из трех солдат и одного офицера, если всего есть 25 солдат и 4 офицера?

4.118. Патруль надо составить из одного офицера и двух солдат. Каким количеством способов это можно сделать, если есть выбор из 10 офицеров и 100 солдат?

Б

4.119. На одной из двух скрещивающихся прямых отмечено пять точек, на другой — 6. Сколько тетраэдров можно построить с вершинами в этих точках?

В

4.120. Из группы в 20 человек надо выбрать две команды по четыре человека. Каким количеством способов это можно сделать?

Контрольные тесты с выбором ответа

■ Правило произведения ■ Повторные испытания ■ Размещения ■ Перестановки ■ Сочетания

■ Правило произведения

А

4.121. В трех группах 20, 25 и 30 человек соответственно. Каким количеством способов можно выбрать по одному представителю от каждой группы?

а	б	в	г
75	15 000	1 500	150

Б

4.122. В алфавите пять букв. Каким количеством способов можно составить фразу из трех слов, каждое из которых имеет три буквы?

а	б	в	г
$125 \cdot 124 \cdot 123$	5^3	5^9	3^5

В

4.123. В группе 20 человек. Есть 30 разных билетов в театр. Каким количеством способов можно выбрать из группы двух человек и дать им билеты в театр?

а	б	в	г
$20 \cdot 19 \cdot 15 \cdot 29$	$20 \cdot 19 \cdot 30 \cdot 29$	$20 \cdot 19 \cdot 15 \cdot 29$	$20^2 \cdot 30^2$

■ Повторные испытания

А

4.124. Бросаются три шестигранных кубика разных цветов. Сколько различных комбинаций может при этом получиться?

а	б	в	г
36	243	120	216

Б

4.125. Сколькими способами можно рассадить шесть человек в два одинаковых вагона, но так, чтобы не все они оказались в одном вагоне?

а	б	в	г
28	30	32	64

В

4.126. Монету подбросили шесть раз. В каком количестве случаев орел выпадет не более двух раз?

а	б	в	г
42	22	32	15

Размещения

А

4.127. Сколькими способами можно набрать подряд четыре различные цифры?

а	б	в	г
5 040	10 000	4 536	3 024

Б

4.128. В классе 10 мальчиков и 10 девочек. Каким количеством способов можно назначить разных дежурных по одному на каждый из шести дней, но так, чтобы дежурства мальчиков и девочек чередовались друг с другом?

а	б	в	г
$10^3 \cdot 9^3$	$2 \cdot 10^3 \cdot 9^3$	$2 \cdot 10^2 \cdot 9^2 \cdot 8^2$	$10^2 \cdot 9^2 \cdot 8^2$

В

4.129. В ряду кинотеатра 10 мест. Сколькими способами можно посадить в этом ряду трех зрителей так, чтобы никакие два из них не сидели рядом?

а	б	в	г
360	330	560	640

Перестановки

А

4.130. Сколько анаграмм у слова ОБМОРОК?

а	б	в	г
140	840	420	120

Б

4.131. Сколькими способами можно поставить в ряд 10 человек так, чтобы между двумя фиксированными людьми стояло ровно три человека?

а	б	в	г
$8!$	$6 \cdot 8!$	$12 \cdot 8!$	$10! - 8!$

В

4.132. Каким количеством способов можно посадить шесть человек за круглый стол? (Расстановки, совмещаемые поворотом, считаются одинаковыми).

а	б	в	г
720	120	360	216

Сочетания

А

4.133. В буфете пять чашек и пять блюдец. Каким количеством способов можно выбрать две чашки и два блюдца?

а	б	в	г
400	625	100	210

Б

4.134. Каким количеством способов можно из 20 различных пар перчаток выбрать 10 перчаток так, чтобы они все были на одну руку?

а	б	в	г
$2C_{20}^{10}$	C_{20}^{10}	$10!$	2^{10}

В

4.135. Сколько имеется кратчайших путей по клеткам шахматной доски, ведущих из одного ее угла в противоположный (переходить можно только в соседнюю по стороне клетку)?

а	б	в	г
$2C_{14}^{7}$	C_{16}^{8}	C_{14}^{7}	$2C_{16}^{8}$

ГЛАВА

5 Координаты и векторы

Тренажеры

■ Задание точек координатами ■ Действия над векторами и их координатами ■ Решение простейших геометрических задач ■ Скалярное произведение векторов ■ Уравнения прямой и плоскости ■ Векторные уравнения прямой и плоскости

■ Задание точек координатами

А

5.1. Изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют заданным условиям.

1. На координатной прямой Ox:

а) $x = 1{,}5$;

б) $x \le 2$;

в) $|x| \ge 4$;

г) $x^4 \le 1$;

д) $|x(x-3)| \ge 2$.

2. На координатной плоскости xOy:

а) $x \le 3$;

б) $y \ge 2$;

в) $y \le 2x$;

г) $xy < 0$;

д) $0 \le xy \le 1$;

е) $\begin{cases} -2 \le x \le 3; \\ |y| > 1; \end{cases}$

ж) $\dfrac{x}{y} = 6$.

3. В координатном пространстве $(x;\ y;\ z)$:

а) $xyz = 0$;

б) $\begin{cases} x = 1; \\ y < 2; \end{cases}$

в) $x + y + z \leq 1$;

г) $x^2 + y^2 = 4$;

д) $y = 3$;

е) $x < y \leq z$.

Б

5.2. Запишите в виде равенств или неравенств соотношения между координатами заданных точек.

1. На координатной оси Ox:

а) точки, удаленные от $P(-3)$ на расстояние 4;

б) точка, симметричная точке $A(2)$ относительно точки $B(8)$;

в) точка, делящая отрезок $[2, 5]$ в соотношении $1:2$;

г) точки, отстоящие от множества точек отрезка $[2, 5]$ не более чем на 3.

2. На координатной плоскости xOy:

а) точка, симметричная точке $P(2; 8)$ относительно оси Oy;

б) точки, равноудаленные от осей координат;

в) точки, расположенные слева от прямой $x = 2$ и справа от прямой $x = 0$;

г) точки, удаленные от точки $P(0, 2)$ на расстояние 3.

3. В координатном пространстве $(x; y; z)$:

а) точка, симметричная точке $P(1; -2; 4)$ относительно начала координат;

б) точка, симметричная точке $P(4; -1; -3)$ относительно оси Ox;

в) точка, симметричная точке $P(0; 1,5; 4)$ относительно плоскости xOy;

г) точки, лежащие в третьем октанте;

д) точки, все координаты которых отрицательны.

В

5.3. Постройте множества точек и запишите соотношения между их координатами.

1. На координатной прямой Ox:

а) точки, отстоящие от точки $P(-1)$ не менее чем на 2;

б) точки, которые расположены ближе к точке $P(7)$, чем к точке $Q(-4)$;

в) точки, сумма расстояний которых до точек $P(3)$ и $Q(4)$ не меньше 4;

г) точки, модуль разности расстояний от которых до точек $P(2)$ и $Q(-1)$ равен 3.

2. На координатной плоскости xOy:

а) точки, у которых расстояние до оси ординат вдвое больше, чем расстояние до оси абсцисс;

б) точки, равноудаленные от точек $P(2; 2)$ и $Q(-3; 3)$;

в) точки, отстоящие от начала координат не меньше чем на 2 и не больше чем на 6;

г) точки, произведение координат которых не меньше -1 и не больше 1.

3. В координатном пространстве $(x; y; z)$:

а) точки, равноудаленные от осей Ox и Oy;

б) точки, расстояние от которых до точки $P(1; -3; 0)$ равно 1;

в) точки, равноудаленные от точек $P(-1; -3; 1)$ и $Q(2; 2; 2)$;

г) точки, отстоящие от оси Oy на расстояние 6.

■ Действия над векторами и их координатами

А

5.4. Дан квадрат $ABCD$; точка M — середина стороны CD, O — точка пересечения диагоналей, точка K делит отрезок BC в соотношении $1:2$. Разложите по векторам $\mathbf{a} = \overline{AD}$ и $\mathbf{b} = \overline{AB}$ следующие векторы:

1) $\overline{AC}$;
2) $\overline{CM}$;
3) $\overline{OD}$;
4) $\overline{DK}$.

5.5. Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ заданы их декартовыми координатами: $\mathbf{a}(1; 2; -1)$, $\mathbf{b}(3; -1; 7)$, $\mathbf{c}(0; 2; 4)$. Найдите координаты следующих векторов:

а) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$;

б) $2\mathbf{a} - (\mathbf{b} + \mathbf{c})$;

в) $\dfrac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{2}$.

5.6. Докажите равенства и объясните их геометрический смысл:

а) $\mathbf{a}+\dfrac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$;

б) $\mathbf{a}-\dfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\dfrac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}$.

Б

5.7. Дан правильный треугольник ABC. Постройте точку M такую, что:

1) $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$;

2) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=0$;

4) $4\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC}$.

5.8. Дана треугольная пирамида с правильным треугольником ABC в основании, с вершиной в точке P, причем ребро PA перпендикулярно плоскости основания, $PA = AB$. Разложите по векторам $\mathbf{c}=\overrightarrow{AP}$, $\mathbf{a}=\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}$ следующие векторы:

1) $\overrightarrow{AK}$, где K — середина стороны BC;

2) $\overrightarrow{KP}$;

3) $\overrightarrow{MN}$, где $\overrightarrow{MN}$ — средняя линия треугольника CPB, параллельная BC.

В

5.9. 1. Докажите, что точки $A(1;\ 1;\ 2)$, $B(4;\ 5;\ -8)$, $C(2;\ -1;\ 0)$ и $D(-1;\ -5;\ 10)$ являются вершинами параллелограмма.

2. Выразите вектор $\overrightarrow{BC}$ через векторы $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\mathbf{b}=\overrightarrow{OD}$, где O — точка пересечения диагоналей параллелограмма.

3. Вычислите сумму квадратов диагоналей параллелограмма.

5.10. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной, равной 2; K_1 — точка пересечения CB_1 и BC_1, точка K_2 — середина ребра DD_1. Вычислите:

1) DB_1;

2) K_1K_2.

5.11. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ $\overrightarrow{AB} = \mathbf{p}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{q}$. Выразите через векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ векторы $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AE}$.

■ Решение простейших геометрических задач

А

5.12. Отрезок, концы которого расположены в точках $A(-4; 2)$, $B(8; -4)$, разделен на четыре части. Найдите координаты точек деления.

5.13. Определите координаты вершин треугольника ABC, если середины его сторон имеют координаты $K(-4; 2)$, $L(1; 6)$, $M(-3; 2)$. Найдите длину медианы AK.

5.14. Даны координаты двух смежных вершин параллелограмма $A(-2; 2)$ и $B(2; 5)$ и точки пересечения диагоналей $K(0; 6)$. Найдите координаты остальных вершин параллелограмма.

Б

5.15. Даны координаты трех вершин параллелограмма $A(3; -4; 7)$, $B(-5; 3; -2)$ и $C(1; 2; -3)$. Найдите:

1) координаты четвертой вершины;
2) точку пересечения диагоналей;
3) длины сторон и диагоналей.

5.16. На оси ординат Oy найдите точку, находящуюся на одинаковом расстоянии от точек $A(1; -4; 7)$ и $B(5; 6; -5)$.

В

5.17. Могут ли точки $A(3; -2; -7)$, $B(5; 3; -2)$ и $C(7; 8; 3)$ быть вершинами треугольника?

5.18. Даны координаты двух точек $A(4; -2; 2)$ и $B(7; -6; 4)$. Через точку B проведена прямая, параллельная вектору $\overrightarrow{OA}$, где O — начало координат. Найдите координаты точки пересечения этой прямой с координатной плоскостью xOy.

■ Скалярное произведение векторов

А

5.19. Векторы **a**, **b** и **c** заданы их декартовыми координатами: **a**(1; 2; –1), **b**(3; –1; 7), **c**(0; 2; 4). Найдите координаты следующих векторов:

1) $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$;

2) $(2\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{b} - 2\mathbf{c})$.

5.20. Длины векторов **a** и **b** равны соответственно 4 и 5, угол между ними равен $\frac{2\pi}{3}$. Вычислите:

1) $\mathbf{a}^2$;

2) $(3\mathbf{a} + 5\mathbf{b})\cdot(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b})$;

3) $(3\mathbf{a} + 5\mathbf{b})^2$.

5.21. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — квадрат, если вершины имеют координаты $A(-3; 5; 6)$, $B(1; -5; 7)$, $C(8; -3; -1)$ и $D(4; 7; -2)$.

Б

5.22. Найдите координаты вектора **x**, коллинеарного вектору $\mathbf{a} = (3; 0; -2)$ и удовлетворяющего условию $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}) = 39$.

5.23. Известно, что $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \frac{1}{2}$; $(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) = -\frac{1}{2}$; $(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}) = \frac{1}{3}$; $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$. Вычислите:

1) $(\mathbf{a} + 3\mathbf{b})\cdot(-2\mathbf{a} - \mathbf{b})$;

2) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})\cdot(4\mathbf{a} - 2\mathbf{c}) + (3\mathbf{b} + \mathbf{a})\cdot(\mathbf{b} - \mathbf{c})$;

3) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2((\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} - \mathbf{b}))$;

4) $(1{,}5\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c})\cdot(3\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$.

5.24. Найдите косинус угла между диагоналями параллелограмма, если три его вершины находятся в точках $A(2; 1; 3)$, $B(5; 2; -1)$ и $C(-3; 3; -3)$.

В

5.25. Заданы координаты вершин треугольника $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -1; 2)$ и $C(-5; 6; -4)$. Найдите длину высоты BD.

5.26. В условиях задачи 5.9 вычислите синус острого угла между диагоналями параллелограмма $ABCD$.

5.27. В условиях задачи 5.10 вычислите угол между DB_1 и D_1B.

5.28. Заданы вершины треугольника $A(6;\ 5;\ -3)$, $B(7;\ -5;\ 1)$ и $C(-1;\ -3;\ 8)$. Докажите, что этот треугольник прямоугольный и найдите косинусы его острых углов.

Уравнения прямой и плоскости

А

5.29. Запишите уравнение прямой на плоскости xOy по следующим данным:

1) прямая проходит через точку $A(2;\ -1)$ и параллельна прямой $y = 2x - 7$;
2) прямая проходит через точку $A(2;\ 5)$ и перпендикулярна прямой $y = x - 4$;
3) каждая точка прямой равноудалена от прямых $y = 2x$ и $y = 0{,}5x$;
4) прямая содержит точки $A(2;\ 1)$ и $B(-5;\ 4)$;
5) прямая касается окружности с центром $(0;\ 0)$ и радиусом 3 в точке $A\ (3;\ 0)$.

Б

5.30. Запишите уравнение плоскости по следующим данным:

1) плоскость проходит через точку $P(7;\ 2;\ 4)$ и параллельна плоскости xOy;
2) плоскость проходит через точку $P(2;\ -1;\ 7)$ и параллельна плоскости xOz;
3) плоскость проходит через три точки $O(0;\ 1;\ 2)$, $P(-1;\ -1;\ 1)$ и $Q(1;\ -3;\ 2)$;
4) плоскость перпендикулярна плоскости xOz и содержит точки $P\ (2;\ 7;\ 1)$ и $Q\ (3;\ -2;\ 4)$.

В

5.31. Дан треугольник с вершинами $A(2;\ 4)$, $B(2;\ 7)$ и $C(6;\ 4)$. Найдите:

1) координаты центра вписанной окружности;
2) координаты центра описанной окружности;

3) уравнение высоты (биссектрисы, медианы), опущенной из вершины A.

■ Векторные уравнения прямой и плоскости

А — Б

5.32. Даны три точки $A(2; 1; 0)$, $B(0; -2; 1)$, $C(1; 1; 1)$. Найдите:

1) направляющие векторы прямых AB, BC и AC;
2) векторное уравнение прямой l, параллельной AB и проходящей через точку $P(2, 3, 4)$;
3) векторное уравнение плоскости α, перпендикулярной AB и проходящей через точку $P(2, 3, 4)$;
4) точки пересечения прямой l с координатными плоскостями;
5) уравнения плоскостей ABC, BCO;
6) уравнения плоскости, проходящей через точку $A(2; -4; 1)$ и параллельной плоскости $x + y - z + 2 = 0$;
7) векторное уравнение прямой, по которой пересекаются плоскости $2x - 3y + z = 0$ и $2x + 3y - 4z - 1 = 0$.

Б — В

5.33. Дан тетраэдр с вершинами $P(1; 2; 3)$, $A(2; 1; 0)$, $B(4; 2; 0)$, $C(0; 3; 3)$. Найдите:

1) уравнение плоскости APC;
2) уравнение плоскости, проходящей через вершину P параллельно основанию ABC;
3) уравнение плоскости, проходящей через вершину A перпендикулярно ребру PC;
4) координаты точки основания, в которую проецируется вершина P;
5) координаты центра O шара, описанного около тетраэдра;
6) уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точек P и C;
7) уравнение сферы, описанной вокруг тетраэдра;
8) уравнение плоскости, проходящей через точку $Q(1; 2; 8)$ и параллельной ребрам PA и BC.

Матричные тесты

■ Уравнение прямой и плоскости ■ Задание точечных множеств на плоскости ■ Скалярное произведение векторов ■ Декартовы координаты в пространстве

■ Уравнение прямой и плоскости

5.34. Сопоставьте описанию прямой ее уравнение.

А

Описание прямой	Уравнение прямой			
	$-0,5x + y = 1$	$x - 2y = 2$	$3x + 2y = 2$	$4x - 6y = 6$
Проходит через точку $A(0; -1)$				
Не имеет точек в IV четверти				
Проходит через точку $A(0; 1)$				
Пересекает ось ординат ниже начала координат				

Б

Описание прямой	Уравнение прямой			
	$x + 2y = 2$	$2x - y = 4$	$2x - y = -2$	$x + 2y = 4$
Параллельна прямой $y = 2x$ и проходит через точку $R(0; 2)$				
Проходит через точку $P(2; 0)$ и перпендикулярна прямой $y = 2x$				
Проходит через точки $P(2; 0)$ и $Q(3; 2)$				
Проходит через точку $Q(-2; 3)$ и параллельна прямой $x + 2y = 0$				

В

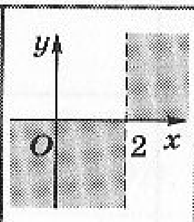
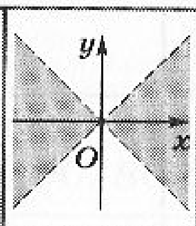
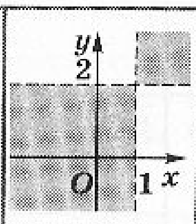
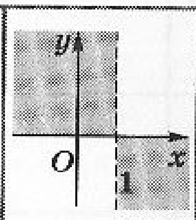
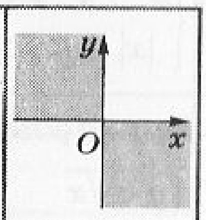
5.35. Сопоставьте описанию плоскости ее уравнение.

Описание плоскости	Уравнение плоскости			
	$x = 7$	$x + y + z = 1$	$x + y = 0$	$x + y + 2z = -1$
Параллельна одной из координатных плоскостей				
Отсекает на координатных осях равные отрезки				
Содержит одну из осей координат				
Одна из координат точек пересечения с осями отрицательна				

■ Задание точечных множеств на плоскости

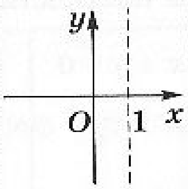
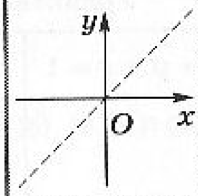
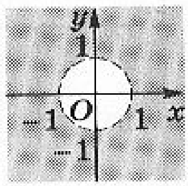
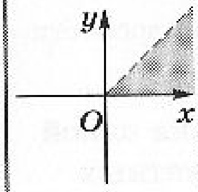
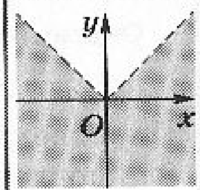
А

5.36. Отметьте, какое их указанных множеств является решением данного неравенства.

Неравенство					
$(x - 1) \times$ $\times (y - 2) > 0$					
$(x - 2)\, y > 0$					
$(x - y) \times$ $\times (x + y) > 0$					
$xy < 0$					
$(x - 1)y < 0$					

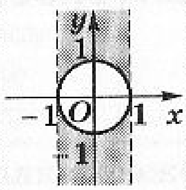
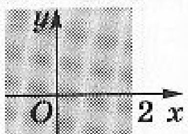
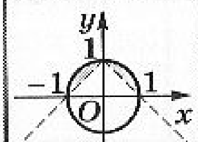
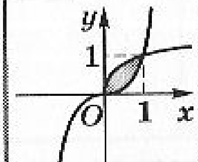
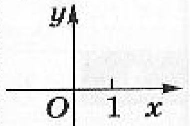
Б

5.37. **Для каждого из данных уравнений и неравенств с двумя переменными укажите множество его решений.**

Уравнение или неравенство					
$\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{y}$					
$\ln x \geq \ln y$					
$y \leq \lvert x \rvert$					
$(1 - x)^2 \leq 0$					
$y^2 \geq 1 - x^2$					

В

5.38. **Сопоставьте уравнению, неравенству, системе неравенств множество их решений.**

Уравнение, неравенство или система неравенств					
$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1; \\ \lvert x \rvert + y \geq 1 \end{cases}$					
$\begin{cases} y > x^3; \\ y < \sqrt{x} \end{cases}$					
$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1; \\ \lvert x \rvert \leq 1 \end{cases}$					
$(1 - x)^2 + y^2 \leq 0$					
$\sqrt{2 - x} = \dfrac{2 - x}{\sqrt{2 - x}}$					

Скалярное произведение векторов

А

5.39. Найдите косинус угла между векторами.

Координаты векторов	Косинус угла			
	-1	$0{,}8$	$\frac{\sqrt{2}}{10}$	$\frac{3}{2\sqrt{35}}$
(3, –1) и (1, 2)				
(–2, 2) и (6, –6)				
(0, 0, 2) и (0, 3, 4)				
(2, 3, –1) и (3, –1, 0)				

Б

5.40. Сопоставьте паре векторов угол между ними.

Координаты векторов	Угол между векторами			
	$\frac{\pi}{2}$	180°	$\frac{3\pi}{4}$	60°
(1,0) и (–2, 2)				
(3, 4) и (–16, 12)				
(–2, –2) и (5, 5)				
(0, 1, 1) и (1, 0, 1)				

В

5.41. Сопоставьте тройке векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ наибольший из углов AOB, AOC, BOC.

Векторы	$\angle BOC$	Все три угла равны	$\angle AOC$	$\angle AOB$
$\overrightarrow{OA} = (2, 1)$ $\overrightarrow{OB} = (-2, 1)$ $\overrightarrow{OC} = (2, -1)$				
$\overrightarrow{OA} = (3, 0, 0)$ $\overrightarrow{OB} = (-2, 0, 0)$ $\overrightarrow{OC} = (0, 0, 14)$				

Векторы	$\angle BOC$	Все три угла равны	$\angle AOC$	$\angle AOB$
$\overrightarrow{OA} = (3, 0, 0)$ $\overrightarrow{OB} = (0, 5, 0)$ $\overrightarrow{OC} = (0, 0, 7)$				
$\overrightarrow{OA} = (11, 0)$ $\overrightarrow{OB} = (0, 3)$ $\overrightarrow{OC} = (-12, 12)$				

Декартовы координаты в пространстве

А

5.42. Сопоставьте описанию множества точек в пространстве его уравнение (систему уравнений).

Описание множества точек	Уравнение (система уравнений)			
	$\lvert x\rvert = 1$	$\begin{cases} x = 1, \\ y = 1 \end{cases}$	$x = y = z$	$x^2 - y^2 = 0$
Прямая, проходящая через начало координат и точку $P(1; 1; 1)$				
Пара параллельных плоскостей, перпендикулярных оси Ox				
Прямая, проходящая через точку $P(1; 1; 1)$ и параллельная оси Oz				
Пара плоскостей, пересекающихся по оси Oz				

Б

5.43. Выберите для уравнения каждой плоскости описание ее свойств (описание не обязательно является полным).

Описание плоскости	Уравнение			
	$x + y + z = 1$	$x - y = 0$	$x + z = 1$	$y + z = 1$
Плоскость параллельна оси Ox				
Плоскость высекает на всех трех осях единичные отрезки				
Точки плоскости равноудалены от точек $P(1; 0; 0)$ и $Q(0; 1; 0)$				
Плоскость перпендикулярна плоскости $x + y - z = 0$				

В

5.44. Сопоставьте описанию множества точек его уравнение (систему уравнений).

Описание множества	Уравнение (система уравнений)			
	$x + y + 1 = 0,$ $x - y + 2z = 4$	$x + y + 1 = 0,$ $5x + 5y = 16$	$x^2 + y^2 + z^2 = 7,$ $x \geq 0$	$x^2 + y^2 + z^2 = 7$
Полусфера				
Пара параллельных плоскостей				
Пара перпендикулярных плоскостей				
Сфера				

Самостоятельные работы

■ Координаты точек и векторов ■ Разложение вектора ■ Скалярное произведение векторов ■ Уравнения прямой и плоскости

■ Координаты точек и векторов

А

5.45. Даны три точки в пространстве $A(1; -2; 4)$, $B(3; 4; -2)$ и $C(0; -6; 2)$. Найдите:

1) координаты середины отрезка AC;

2) координаты векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$;

3) координаты точки D такой, что $ABCD$ — параллелограмм;

4) расстояние от точки A до точки D.

Б

5.46. Даны три точки в пространстве $A(1; -2; 4)$, $B(3; 4; -2)$ и $C(0; -6; 2)$. Найдите:

1) координаты точки, делящей отрезок AC в соотношении $1:2$;

2) координаты векторов $2\overrightarrow{BC}$ и $3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BA}$;

3) на прямой AC координаты такой точки D, чтобы треугольник ABD был прямоугольный;

4) расстояние от точки A до прямой BC.

В

5.47. Даны три точки в пространстве $A(1; -2; 4)$, $B(3; 4; -2)$ и $C(0; -6; 2)$. Найдите:

1) координаты точки, делящей проекцию отрезка AC на ось Ox в соотношении $1:2$;

2) координаты векторов $3\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$ и $2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{BC}$;

3) координаты точки D, равноудаленной от точек A, B, и C, координата z которой равна 2;

4) расстояние от точки A до плоскости BCO.

■ Разложение вектора

А

5.48. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Известны координаты точек $A(0; 0; 0)$, $D(0; 2; 0)$, $A_1(0; 0; 7)$, $C_1(2; 2; 7)$.

1. Найдите координаты остальных вершин.
2. M — центр грани DCC_1D_1. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.
3. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AM}$.

Б

5.49. Дана правильная четырехугольная пирамида $OABCD$, одна из вершин которой O является началом координат. Известны координаты точек $A(-1; -1; 2)$, $C(1; 1; 2)$.
1. Найдите координаты оставшихся вершин.
2. M — центр описанной окружности основания $ABCD$. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OD}$.
3. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AM}$.

В

5.50. Дана правильная четырехугольная усеченная пирамида $ABCDA_1B_1C_1D_1$, одна из вершин которой A является началом координат. Известны координаты точек $A_1(1; 1; 4)$, $C(3; 3; 0)$; $D_1(1; 2; 4)$.
1. Найдите координаты остальных вершин.
2. M — центр описанной окружности основания $OBCD$. Разложите вектор $\overrightarrow{A_1M}$ по векторам $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.
3. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{A_1M}$.

■ Скалярное произведение векторов

А

5.51. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Точки K, L и M — середины ребер A_1B_1, CC_1 и BC. Найдите:
1) стороны и углы треугольника KLM;
2) угол между прямыми AM и DC_1;
3) проекцию вектора $\overrightarrow{AC}$ на направление вектора $\overrightarrow{KL}$.

Б

5.52. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром 1 и основанием ABC. Точки K, L и M — центры вписанных окружностей боковых граней. Найдите:
1) стороны и углы треугольника KLM;

2) угол между плоскостями ABD и KLM;
3) площадь проекции треугольника LAC на плоскость основания.

В

5.53. Дана правильная шестигранная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ с ребром 1. Найдите:
1) стороны и углы треугольника AC_1E_1;
2) угол между плоскостями AC_1E_1 и A_1CE;
3) площадь параллелограмма BCE_1F_1.

Уравнения прямой и плоскости

А

5.54. Даны три точки $A(1; 2; 0)$, $B(2; 3; 0)$, $C(3; 4; 7)$. Напишите уравнения:
1) прямой AB;
2) прямой, проходящей через B и параллельной оси Ox;
3) плоскости, содержащей все три данные точки.

Б

5.55. Даны три точки $A(1; 2; 0)$, $B(2; 3; 0)$, $C(3; 4; 7)$. Напишите уравнения:
1) прямой, параллельной AB, проходящей через точку C;
2) прямой, проходящей через точку B параллельно оси Ox;
3) плоскости, содержащей точку C и параллельной плоскости ABO, где O — начало координат.

В

5.56. Даны три точки $A(1; 2; 0)$, $B(2; 3; 0)$, $C(3; 4; 7)$. Напишите уравнения:
1) прямой, перпендикулярной AB, проходящей через точку C;
2) прямой, проходящей через точку B и перпендикулярной плоскости yOx;

3) плоскости, содержащей точку с координатами (1; 1; 1) и перпендикулярной плоскостям ABO и ABC, где O — начало координат.

Контрольные тесты с выбором ответа

■ Координаты точки ■ Расстояния ■ Разложение вектора ■ Действия над векторами ■ Скалярное произведение векторов ■ Уравнение плоскости

■ Координаты точки

А

5.57. Найдите координаты середины отрезка AB, если известны координаты его концов: $A(-1; 3; 0)$; $B(3; -2; 4)$.

а	б	в	г
(1; 1; 2)	$\left(2; -\frac{5}{3}; 2\right)$	(4; –5; 3)	$\left(1; \frac{1}{2}; 2\right)$

Б

5.58. Дан параллелограмм $ABCD$. Найдите координаты вершины C, если известны координаты остальных вершин: $A(2; -3; 0)$, $B(-1; 0; 3)$, $D(0; -1; -4)$.

а	б	в	г
(0; 7; –2)	(6; –9; –6)	(–3; 2; –1)	(4; 1; –2)

В

5.59. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите координаты точки пересечения его диагоналей, если известны координаты следующих вершин: $A(2; -1; 4)$, $B(-1; 3; 0)$, $A_1(0; -3; 5)$, $D_1(3; 0; -2)$.

а	б	в	г
$\left(2; -\frac{1}{2}; -\frac{7}{2}\right)$	(2; 3; –2)	$\left(-1; -\frac{3}{2}; 1\right)$	$\left(1; \frac{3}{2}; -1\right)$

■ Расстояния

5.60. Найдите кратчайшее расстояние от точки A до сферы, заданной уравнением.

А

$A(6;\ 7;\ -6)$; $x^2 + y^2 + z^2 = 10$.

а	б	в	г
111	$11 - \sqrt{10}$	1	$11 + 2\sqrt{10}$

Б

$A\left(-2;\ -\dfrac{7}{3};\ 2\right)$; $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

а	б	в	г
$\dfrac{23}{3}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{85}{9}$	$\dfrac{37}{3}$

В

$A(5;\ 9;\ -4)$; $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4z = 19$.

а	б	в	г
102	$11 - 2\sqrt{19}$	$11 - \sqrt{28}$	$11 - \sqrt{19}$

■ Разложение вектора

5.61. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Разложите вектор $\mathbf{d}$ по векторам $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AA_1}$.

А

$\mathbf{d} = \overrightarrow{KL}$, где K — середина AA_1, L — середина B_1C_1.

а	б	в	г
$\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$	$\mathbf{a} + \dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$	$\mathbf{a} + \dfrac{\mathbf{b}}{2} + \mathbf{c}$	$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \dfrac{\mathbf{c}}{2}$

Б

$\mathbf{d} = \overrightarrow{OO_1}$, где O и O_1 — середины граней $ABCD$ и DD_1C_1C.

а	б	в	г
$\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$	$\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2}$	$\dfrac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$	$\mathbf{b}+\dfrac{\mathbf{c}}{2}$

В

$\mathbf{d}=\overline{MM_1}$, где M и M_1 — центры тяжести треугольников DA_1B_1 и ABD_1.

а	б	в	г
$\dfrac{\mathbf{c}}{3}$	$\dfrac{2}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$	$\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$	$-\dfrac{\mathbf{c}}{3}$

Действия над векторами

5.62. Даны векторы $\mathbf{a}(2; 0; 1)$, $\mathbf{b}(0; 1; -1)$ и $\mathbf{c}(-1; -2; 0)$.

А

Вычислите координаты вектора $2\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}$.

а	б	в	г
(3; 1; 3)	(5; –1; 3)	(5; 1; 3)	(5; 1; 1)

Б

Найдите α и β так, чтобы вектор $\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}+\beta\mathbf{c}$ был коллинеарен вектору $\mathbf{d}(1; 1; -1)$.

а	б	в	г
$\alpha=\dfrac{5}{2};\ \beta=\dfrac{1}{2}$	$\alpha=\dfrac{7}{2};\ \beta=-\dfrac{1}{2}$	$\alpha=\dfrac{5}{2};\ \beta=\dfrac{1}{2}$	$\alpha=-\dfrac{7}{2};\ \beta=\dfrac{1}{2}$

В

Разложите вектор $\mathbf{d}=(2; 1; -3)$ по векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

а	б	в	г
$\mathbf{d}=2\mathbf{a}+5\mathbf{b}-\mathbf{c}$	$\mathbf{d}=2\mathbf{a}+5\mathbf{b}+2\mathbf{c}$	$\mathbf{d}=2\mathbf{a}+3\mathbf{b}+2\mathbf{c}$	$\mathbf{d}=\mathbf{a}+5\mathbf{b}+2\mathbf{c}$

■ Скалярное произведение векторов

А

5.63. Правильный шестиугольник $ABCDEF$ описан вокруг окружности радиусом 1 и центром O. Вычислите скалярное произведение $(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC})$.

а	б	в	г
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$

Б

5.64. Найдите косинус угла между отрезками, соединяющими центр куба с двумя соседними между собой вершинами.

а	б	в	г
$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$

В

5.65. Найдите косинус острого угла, который образует с гранями куба плоскость, проходящая через диагонали двух смежных граней куба, выходящих из одной вершины.

а	б	в	г
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{4}$

■ Уравнение плоскости

5.66. Плоскость α задана уравнением $x + y - z = 3$.

А

Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; -1; 3)$ и параллельной плоскости α.

а	б	в	г
$x + y - z = 2$	$x - y + z = -2$	$x + y - z + 2 = 0$	$x - y + z = 2$

Б

Найдите уравнение плоскости, содержащей середины всех отрезков, соединяющих точку $A(2; -1; 3)$ с точками плоскости α.

а	б	в	г
$x + y - z + \frac{1}{2} = 0$	$2x + 2y - 2z + 3 = 0$	$x + y - z = 1$	$2x + 2y - 2z = 1$

В

Найдите расстояние от точки $A(2; 3; -1)$ до плоскости α.

а	б	в	г
$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	3	$3\sqrt{3}$

ГЛАВА 6

Основы тригонометрии

Тренажеры

■ Углы и вращательное движение ■ Вычисление значений тригонометрических функций ■ Связь между значениями тригонометрических функций ■ Определение знака тригонометрических выражений ■ Использование формул приведения ■ Преобразования тригонометрических выражений ■ Тригонометрические уравнения ■ Решение простейших тригонометрических неравенств ■ Тригонометрические функции ■ Графическое решение тригонометрических уравнений и неравенств

■ Углы и вращательное движение

6.1. Переведите радианную меру углов в градусную.

1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$; 5) $\frac{3\pi}{4}$; 6) $\frac{7\pi}{4}$; 7) $1{,}5\pi$; 8) $\frac{5\pi}{6}$; 9) $\frac{11\pi}{6}$; 10) $\frac{13\pi}{3}$; 11) 1,5; 12) 3.

6.2. Найдите радианные меры углов. Выразите их в долях π и в виде десятичной дроби с точностью до сотых.

1) $15°$; 2) $30°$; 3) $80°$; 4) $90°$; 5) $210°$; 6) $150°$; 7) $225°$; 8) $300°$; 9) $270°$; 10) $400°$; 11) $450°$; 12) $800°$.

6.3. Определите, в какой четверти лежит данный угол. Укажите знак sin, cos, tg, ctg этого угла.

А

1) $88°$; 2) $100°$; 3) $145°$; 4) $-200°$; 5) $300°$; 6) $400°$; 7) $-30°$; 8) $-120°$; 9) $-415°$; 10) $-520°$.

Б

1) $\frac{7\pi}{15}$; 2) $-\frac{9\pi}{17}$; 3) $\frac{11\pi}{12}$; 4) $\frac{23\pi}{20}$; 5) $\frac{31\pi}{21}$; 6) $-\frac{14\pi}{5}$; 7) $-\frac{23\pi}{6}$; 8) $\frac{25\pi}{7}$; 9) $-\frac{21\pi}{4}$; 10) $-\frac{39\pi}{5}$.

В

1) 1,6; 2) 3; 3) 4; 4) –2,1; 5) –1,8; 6) 8; 7) –7,5; 8) 10; 9) 15; 10) –31.

Вычисление значений тригонометрических функций

6.4. Вычислите значение выражения.

А

1) $\cos\frac{2\pi}{3}$; 2) $\cos\frac{11\pi}{6}$; 3) $\cos 135°$; 4) $\sin\pi$; 5) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; 6) $\cos 5\pi$;

7) $\sin(-150°)$; 8) $\sin(-600°)$; 9) $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; 10) $\sin\frac{5\pi}{3}$; 11) $\sin 225°$;

12) $\cos(-510°)$; 13) $\mathrm{ctg}\frac{7\pi}{6}$; 14) $\mathrm{ctg}\,270°$; 15) $\mathrm{ctg}\frac{7\pi}{4}$; 16) $\mathrm{tg}\,150°$;

17) $\mathrm{ctg}\frac{7\pi}{3}$; 18) $\mathrm{tg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$; 19) $\mathrm{tg}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$; 20) $\mathrm{tg}\left(-\frac{8\pi}{3}\right)$;

21) $\sin 60° - \mathrm{tg}\,120°$; 22) $\mathrm{tg}\,45°\sin 60°\,\mathrm{ctg}\,30°$;

23) $\frac{2+2\sin 60°\cos 150°}{\sin 150°}$; 24) $\sin\pi + \cos\pi + \mathrm{tg}\,\pi$;

25) $\frac{\sin\frac{\pi}{2} - \cos\pi + \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{6} - \sin\frac{3\pi}{2}}$; 26) $\sin 270° + \mathrm{ctg}\,750°$;

27) $\mathrm{tg}\,630° + \sin 420°$; 28) $\mathrm{ctg}\,120° + \cos(-600°)$;

29) $(2 - 2\sin 300°)(2 - 2\cos 330°)$; 30) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\frac{5\pi}{4}$.

Б

1) $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{6}-\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$; 2) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3}+\cos\frac{7\pi}{6}$; 3) $\sin\left(\frac{20}{3}\pi\right)+2\cos\frac{13\pi}{3}$;

4) $\operatorname{tg}(-510^\circ)-\operatorname{ctg}1020^\circ$; 5) $\cos\left(-\frac{7}{4}\pi\right)+\operatorname{tg}(-25\pi)$;

6) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{13\pi}{6}\right)+\sin\left(-\frac{8}{3}\pi\right)$;

7) $\sqrt{(2\sin45^\circ-1)^2}+\sqrt{(1-\cos45^\circ)^2}-4\sin495^\circ$;

8) $2\cos(-135^\circ)\sqrt{2-2\cos30^\circ}$; 9) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$ при $\alpha=45^\circ$, $\beta=15^\circ$; 10) $\operatorname{tg}(2\alpha-\beta)+\cos\alpha\operatorname{ctg}(6\alpha+6\beta)$ при $\alpha=20^\circ$, $\beta=-5^\circ$;

11) $\log_2\sin\frac{\pi}{4}+\log_{\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi}{4}$; 12) $\log_3\cos30^\circ-\log_9\sin^2 30^\circ$.

В

1) $\log_2\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{180}\right)\cdot\log_3\left(\operatorname{tg}\frac{2\pi}{180}\right)\cdot\log_4\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{180}\right)\cdot\ldots\cdot\log_{90}\left(\operatorname{tg}\frac{89\pi}{180}\right)$;

2) $\left(\lg(\operatorname{tg}46^\circ)-\frac{1}{2}\lg3\right)\cdot\left(\lg(\operatorname{tg}47^\circ)-\frac{1}{2}\lg3\right)\cdot\ldots\cdot\left(\lg(\operatorname{tg}89^\circ)-\frac{1}{2}\lg3\right)$;

3) $(1+\log_2\sin1^\circ)(1+\log_2\sin2^\circ)\cdot\ldots\cdot(1+\log_2\sin89^\circ)$;

4) числа α, β, γ, δ принадлежат промежутку $[0;\,2\pi]$; $\sin\alpha=\frac{\sqrt3}{2}$; $\cos\beta=-\frac{\sqrt2}{2}$; $\operatorname{tg}\gamma=-\frac{1}{\sqrt3}$; $\operatorname{ctg}\delta=\sqrt3$; $\sigma=\alpha+\beta+\gamma+\delta$. Найдите $\sigma_{\min}$ и $\sigma_{\max}$; 5) $\frac{\sin1^\circ\cdot\sin2^\circ\cdot\ldots\cdot\sin90^\circ}{\sin91^\circ\cdot\sin92^\circ\cdot\ldots\cdot\sin179^\circ}$; 6) $\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}2^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}89^\circ$;

7) $\log_3\left(\sqrt{\sin\frac{5\pi}{6}-\cos\frac{2\pi}{3}}-\cos\frac{5\pi}{2}\right)$;

8) $(2\sin1^\circ-1)(2\sin2^\circ-1)\cdot\ldots\cdot(2\sin90^\circ-1)$.

■ Связь между значениями тригонометрических функций

6.5. Вычислите значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла, используя имеющуюся информацию.

А

1) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt3}{2}$, $\cos\alpha>0$; 2) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt2}{2}$, $\sin\alpha<0$;

3) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}, -\pi < \alpha < 0$; 4) $\cos\alpha = \frac{3}{5}, \sin\alpha > 0$; 5) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\sin\alpha < 0$; 6) $\sin\alpha = \frac{1}{3}, -3\pi < \alpha < -2\pi$; 7) $\sin\alpha = \frac{3}{5}, 4\pi < \alpha < 5\pi$; 8) $\sin\alpha = 1$, 9) $\sin\alpha = \frac{1}{5}, 4\pi < \alpha < 5\pi$; 10) $\sin\alpha = 1, 0 < \alpha < \frac{5\pi}{2}$;

11) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}, \cos\alpha > 0$; 12) $\operatorname{ctg}\alpha = 3, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; 13) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos\alpha > 0$; 14) $\operatorname{ctg}\alpha = -1, \cos\alpha > 0$; 15) $\operatorname{tg}\alpha = 2, 90° < \alpha < 270°$.

Б

1) $\sin\alpha = \frac{1}{2}, \cos\alpha > \frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha = \frac{1}{3}, \sin\alpha\cos\alpha > 0$; 3) $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$, $\frac{1}{\cos\alpha} < 1$; 4) $\cos\alpha = 0, -5,6\pi < \alpha < -4,8\pi$; 5) $\cos\alpha = \frac{1}{2}, \sin\alpha > \frac{1}{2}$; 6) $\cos\alpha = 1; |\alpha| < \frac{5\pi}{2}$; 7) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}, \frac{1}{\sin\alpha} < 1$; 8) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{7}$, $\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha > 0$; 9) $\sin\alpha = -\frac{1}{4}, \sin 2\alpha < 0$; 10) $4\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 5$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

В

1) $\cos\alpha = \frac{1}{2}, \cos\alpha > \sin\alpha$; 2) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\alpha \le \sin\alpha$;

3) $\sin\alpha = -\frac{1}{3}, \sin\alpha + \cos\alpha < 0$; 4) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \sin\alpha < |\cos\alpha|$;

5) $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}, \cos\alpha > \sin\alpha$; 6) $\sin\alpha = 0, 10 < \alpha < 13$;

7) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}, \sin\alpha + \cos\alpha < -1$; 8) $\cos\alpha = 0; 10 < \alpha < 13$; 9) $\cos\alpha = 1$, $7 < \alpha < 15$; 10) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}, \cos\alpha < |\sin\alpha|$; 11) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}, \sin\alpha + \cos\alpha > 1$; 12) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\alpha \le \cos\alpha$; 13) $\sin\alpha = -\frac{1}{4}, \sin 2\alpha < 0$;

14) $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}, \sin\alpha > \cos\alpha$; 15) $\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{6}{5}, |\cos\alpha| > \sin\alpha$.

6.6. Расположите в порядке возрастания числа $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

$\operatorname{tg}\alpha = 10, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

6.7. Найдите $\dfrac{5\sin^2 y - 4\sin y\cos y + 3}{3\sin y\cos y - 4\sin^2 y - 5\cos^2 y}$, если $\operatorname{ctg} y = 2$.

6.8. Докажите, что $A > 4$, если $A = \dfrac{1}{\cos z} + \cos z - \operatorname{tg} z - \operatorname{ctg} z$, где $z \in \left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Определение знака тригонометрических выражений

6.9. Определите знак выражения.

А

1) $\sin 130° \operatorname{tg} 310°$; 2) $\sin 3 \operatorname{ctg} 3{,}2$; 3) $\sin 290° \operatorname{tg}(-130°) \operatorname{tg} 3$;

4) $\dfrac{\cos(\sin 2)}{\operatorname{tg}(\cos 1)}$; 5) $\log_{\frac{1}{2}} \cos 43° + \log_2 \cos 47°$; 6) $\cos 15° - \cos\dfrac{\pi}{11}$;

7) $\operatorname{tg} 71° - \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{9}$; 8) $\cos 42° - \cos 18°$; 9) $\cos 20° - \cos\dfrac{\pi}{8}$;

10) $\sin 1 \cos 2 \operatorname{tg} 3 \operatorname{ctg} 4$.

Б

1) $\sin\sqrt{\pi}\cos 10$; 2) $\sin\dfrac{3}{2}\cos\dfrac{8}{7}\operatorname{tg}\dfrac{15}{7}\operatorname{ctg}\dfrac{7}{16}$; 3) $\cos 6 - \cos 6°$;

4) $\cos 3{,}2 - \sin 5$; 5) $\operatorname{tg} 43° \operatorname{tg} 44° \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 46° \operatorname{tg} 47° - \operatorname{tg} 48°$;

6) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\cos^2 134° - 1}}$; 7) $\operatorname{tg} 42° - 2 + \operatorname{ctg} 41°$;

8) $\dfrac{\sin 1 \sin 2 \sin 3 \sin 4 \sin 5}{\cos 6 \cos 5 \cos 4 \cos 2 \cos 1}$; 9) $\operatorname{tg} 22° + \operatorname{ctg} 23° - \operatorname{tg} 23° - \operatorname{ctg} 22°$;

10) $\sin 86° + \cos 86° - 1$.

В

1) $\sin 11° + (\sin 11°)^{-1} - 2$; 2) $\cos^2 52° + (\sin 38°)^{-2} - \dfrac{\pi}{2}$;

3) $\dfrac{\sin 88° - \operatorname{tg} 46°}{1 - \cos 88°} + 0{,}5$; 4) $5\operatorname{tg}^2 39° - 3x^2 - 3x^{-2}$;

5) $\log_3 5 + 2\sin\dfrac{55\pi}{37} + \log_5 3$.

■ Использование формул приведения

А

6.10. Упростите выражение.

1) $\operatorname{tg}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+3t\right)$; 3) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}-t\right)$; 4) $\operatorname{ctg}(270^\circ+t)$;

5) $\cos(\pi+\alpha)\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$; 6) $\sin(270^\circ+\alpha)-\sin(270^\circ-\alpha)$;

7) $\dfrac{\cos^2(\pi+\alpha)}{1-\cos^2\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}$; 8) $\sin(\alpha-\pi)\cos\left(-\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)+1$.

Б

6.11. Расположите в порядке возрастания.

1) $\operatorname{ctg}270^\circ$, $\sin\frac{11\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}$; 2) $\sin5\pi$, $\cos150^\circ$, $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{2}$, $\cos(-600^\circ)$; 3) $\sin40^\circ$, $\sin80^\circ$, $\sin120^\circ$, $\sin200^\circ$; 4) $\operatorname{tg}46^\circ$, $\operatorname{ctg}47^\circ$, $2\sin^2\frac{5\pi}{4}$; 5) $\sin3$, $\cos\frac{\pi}{2}$, $\sin1$, $\cos10\pi$; 6) $\cos1$, $\cos2$, $\cos3$, $\cos4$;

7) $\operatorname{tg}\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{4}$, $\sin2$.

В

6.12. Вычислите значение выражения.

1) $\sin\frac{14\pi}{3}$, $\cos\frac{19\pi}{6}$, $\operatorname{tg}\frac{15\pi}{4}$, $\cos1470^\circ$, $\sin840^\circ$;

2) $\left[\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]^2+\left[\cos(2\pi-\alpha)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right]^2$ при $\alpha=\frac{\pi}{6}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}+\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}}{\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}\sin\frac{5\pi}{3}\left(\sin^2\frac{4\pi}{3}-\cos^2\frac{2\pi}{3}\right)}$.

■ Преобразования тригонометрических выражений

□ Основные тригонометрические тождества

А

6.13. Могут ли одновременно выполняться равенства?

1) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = 4$, $\operatorname{ctg}\alpha = -0{,}25$;

3) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2{,}5}$; 4) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$;

5) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$; 6) $\sin\alpha = \frac{6\sqrt{2}}{11}$, $\cos\alpha = -\frac{7}{11}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{7}{6\sqrt{2}}$;

7) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}+1$, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2}-1$; 8) $\sin\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{16-\pi^2}}{4}$;

9) $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; 10) $\sin\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}$.

Б

6.14. Упростите выражение.

1) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$; 2) $\frac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{\cos\alpha(1+\sin\alpha\cos\alpha)} + \operatorname{tg}\alpha$;

3) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} + 2\operatorname{ctg}\alpha$; 4) $\frac{\sin^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^3\alpha}$;

5) $\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta} + \frac{1-\sin\beta}{\cos\beta}$; 6) $\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha$;

7) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; 8) $\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta} - \operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\beta$;

9) $\sin^2\alpha + \frac{1}{(\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha + \cos\alpha)^2}$; 10) $\frac{1-\cos^4\alpha - \sin^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha} - \cos^4\alpha$.

В

6.15. Докажите тождество.

1) $\frac{1-\sin^6\alpha - \cos^6\alpha}{1-\sin^4\alpha - \cos^4\alpha} = \frac{3}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}-2\sin\alpha}{2\cos\alpha - 1} = \frac{1+2\cos\alpha}{2\sin\alpha + \sqrt{3}}$.

6.16. Упростите выражение.

1) $\sqrt{\sin^2\alpha(1-\operatorname{ctg}\alpha) + \cos^2\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha)} + \sin\alpha$, если $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$;

2) $\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\cos^2\beta}}{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$, если $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

6.17. Найдите значение выражения.

1) $\dfrac{8\sin\alpha - 3\cos\alpha}{\sin^3\alpha + 5\sin^2\alpha\cos\alpha - 8\cos^3\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -3$;

2) $\dfrac{4\sin\alpha - \cos\alpha}{\cos\alpha + 4\sin\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha$ не существует.

□ Двойной и половинный углы

А

6.18. Упростите выражение.

1) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha$; 2) $\dfrac{\sin^2\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{\sin 2\alpha}$; 3) $\dfrac{\cos 70^\circ}{\cos 35^\circ + \sin 35^\circ} + \sin 35^\circ$;

4) $\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha$; 5) $1 - 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

6) $4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}\right)\sin(270^\circ - \alpha)$; 7) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}}$;

8) $\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg}\alpha} - \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$; 9) $\dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$.

Б

6.19. Вычислите значение выражения.

1) $\sin\alpha + \cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 3$; 2) $\sin 4\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 2$;

3) $\cos 2\alpha$, если $2\operatorname{ctg}^2\alpha + 7\operatorname{ctg}\alpha + 3 = 0$ и $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < \dfrac{7\pi}{4}$;

4) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha - 6}{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 2}$, если $\alpha = \dfrac{3\pi}{16}$; 5) $\sin 4\alpha - \dfrac{4\operatorname{tg}\alpha\left(1 - \operatorname{tg}^2\alpha\right)}{\left(1 + \operatorname{tg}^2\alpha\right)^2}$;

6) $\cos 4\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$.

6.20. Докажите тождество.

1) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = \dfrac{3\cos^2 2\alpha + 1}{4}$; 2) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = \dfrac{5 + 3\cos 4\alpha}{8}$;

3) $8\sin 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ = 2$; 4) $\sin\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{1}{4}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{5}$.

В

6.21. Найдите значение выражения.

1) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$; 2) $\sqrt{\dfrac{\sin 4\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}} \cdot \dfrac{1}{\sin 2\alpha}$,

если $\dfrac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$; 3) $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{5\pi}{7}$; 4) $4\sin 18^\circ \sin 306^\circ$;

5) $\sin 2\alpha$, если $t = \operatorname{ctg}\alpha$ — корень уравнения $t^2 + 4t + 1 = 0$;

6) $|3\sin\alpha - \cos\alpha|$, если $3\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = 1$.

□ Формулы сложения

А

6.22. Упростите выражение.

1) $\cos\alpha + \cos(240^\circ + \alpha) + \cos(240^\circ - \alpha)$;

2) $\dfrac{\sin 22^\circ \cos 8^\circ - \cos 158^\circ \cos 98^\circ}{\sin 23^\circ \cos 7^\circ + \cos 157^\circ \cos 97^\circ}$; 3) $\dfrac{\sin 56^\circ \sin 124^\circ - \sin 34^\circ \cos 236^\circ}{\cos 28^\circ \cos 88^\circ + \cos 178^\circ \sin 208^\circ}$;

4) $\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{30}\cos\dfrac{\pi}{15} + \sin\dfrac{\pi}{30}\sin\dfrac{\pi}{15}}{\sin\dfrac{7\pi}{30}\cos\dfrac{4\pi}{15} + \cos\dfrac{7\pi}{30}\sin\dfrac{4\pi}{15}}$;

5) $\sin 20^\circ + \sin 13^\circ \sin 57^\circ - \sin 33^\circ \sin 77^\circ$;

6) $\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2\cos(60^\circ + \alpha)}{2\sin(60^\circ + \alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha}$; 7) $\dfrac{\cos(30^\circ - \alpha) - \cos 330^\circ \cos\alpha}{\sin(30^\circ - \alpha) + \sin 120^\circ \sin\alpha}$;

8) $\cos\dfrac{2\pi}{7}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{7} + \sin\dfrac{2\pi}{7}$; 9) $\cos^2\alpha + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} - \alpha\right)$;

10) $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$.

Б

6.23. Вычислите значение выражения.

1) $2\cos(60^\circ - \alpha) - \sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha$;

2) $\cos^2(\alpha - 30^\circ) + \cos^2(\alpha + 30^\circ) + \sin^2\alpha$;

3) $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) - \cos^2\alpha + \sin^2\beta$; 4) $\sin 15^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ \cos 15^\circ$;

5) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\sin(45^\circ - \alpha)}{2\sin(60^\circ + \alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha}$; 6) $\dfrac{\sqrt{3}\sin 65^\circ - \sin 25^\circ}{\sqrt{2}\sin 10^\circ - \sqrt{2}\cos 10^\circ}$;

7) $\sin 2\alpha$, если $\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{2}{\sqrt{5}}$; 8) $\sin 80^\circ\left(\sqrt{3}-\operatorname{tg}70^\circ\right)$;

9) $\sqrt{3}\cos^{-1}70^\circ-\cos^{-1}20^\circ$;

10) $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{3}$, $2\operatorname{tg}\alpha=-\operatorname{tg}\beta$.

В

6.24. Найдите значение выражения.

1) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ — корни уравнения $x^2-4x+2=0$;

2) $\sin 4\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha$ — корень уравнения $8(t-t^3)=(1+t^2)^2$;

3) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $(\cos 5\alpha)(\cos\alpha)^{-1}$, если $\cos 2\alpha=-\frac{1}{4}$;

5) $\cos 3\alpha+\cos\alpha$, если α — корень уравнения $2\cos^3\alpha+1=\cos\alpha$.

□ Преобразование суммы в произведение и обратно

А

6.25. Преобразуйте в произведение.

1) $\sin\frac{11\pi}{12}+\sin\frac{5\pi}{12}$; 2) $\cos 6\alpha-\cos 3\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$;

4) $\sin\alpha+\cos\alpha$; 5) $\sin\alpha-\cos\beta$; 6) $\sqrt{3}-\operatorname{tg}\alpha$.

6.26. Преобразуйте в сумму.

1) $\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{40}$; 2) $\cos 18^\circ\cos 66^\circ$; 3) $\sin 5\alpha\sin 3\alpha$; 4) $\cos\alpha\sin 3\alpha$.

Б

6.27. Докажите тождества.

1) $1-\sin\alpha-\cos\alpha=2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-45^\circ\right)$;

2) $\dfrac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\alpha}=\cos\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha-1\right)$;

3) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha-\beta)=4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

4) $1-2\cos\alpha+\cos 2\alpha=-4\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}$;

5) $\sin 16^\circ + \sin 24^\circ + \sin 40^\circ = 4\sin 20^\circ \cos 12^\circ \cos 8^\circ$;

6) $4\cos\alpha\cos(60^\circ - \alpha)\cos(60^\circ + \alpha) = \cos 3\alpha$.

6.28. Вычислите значение выражения.

1) $\dfrac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ$; 2) $32\sin 70^\circ \cos 40^\circ \sin 10^\circ$;

3) $\sqrt{8}(\cos 5^\circ - \sin 5^\circ) - 8\cos^2 25^\circ$; 4) $\cos 20^\circ + \sin 190^\circ + \cos 140^\circ$.

B

6.29. Вычислите значение выражения.

1) $\cos 20^\circ + \sin 190^\circ + \cos 140^\circ$; 2) $\sin 130^\circ \sin 190^\circ + \sin^2 110^\circ$;

3) $\sin 4\alpha$, если $\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{8}\right) = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$; 4) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ$;

5) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{2\alpha + \pi}{4}\right)$, если $\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$, $\alpha \in \left(0; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

6.30. Сравните по величине числа.

1) $a = \sin 39^\circ + \sin 41^\circ$ и $b = \sin 38^\circ + \sin 42^\circ$;

2) $a = \operatorname{tg}1\operatorname{tg}2 + \operatorname{tg}2\operatorname{tg}3 - \dfrac{\operatorname{tg}3}{\operatorname{tg}1}$ и $b = -3$;

3) $a = 1 - 2\sin 29^\circ$ и $b = 2\sin 31^\circ - 1$;

4) $a = \operatorname{tg}22^\circ + \operatorname{ctg}24^\circ$ и $b = \operatorname{tg}24^\circ + \operatorname{ctg}22^\circ$;

5) $a = \sin\dfrac{\pi}{16}\cos\dfrac{\pi}{16}\cos\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{4}$ и $b = \dfrac{1}{7}$.

6.31. Вычислите значение выражения.

1) $3\sin 100^\circ \cos 50^\circ - 2\sin^3 50^\circ$;

2) $\sin^4\left(\dfrac{\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) + \sin^4\left(\dfrac{5\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\dfrac{7\pi}{8}\right)$;

3) $\sin 20^\circ \cos 50^\circ \sin 60^\circ \cos 10^\circ$;

4) $\dfrac{\operatorname{ctg}60^\circ + \operatorname{tg}60^\circ + \operatorname{ctg}50^\circ + \operatorname{tg}50^\circ}{\cos 20^\circ}$.

■ Тригонометрические уравнения

□ Простейшие тригонометрические уравнения

6.32. Найдите все корни уравнений.

А

1) $\sin 3x = 0$; 2) $\cos 4x = 1$; 3) $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = -1$; 4) $2\sin\dfrac{x}{3} = 1$;

5) $\cos 5x + 1 = 0$; 6) $3\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$; 7) $\operatorname{ctg}\dfrac{2x}{3} = 0$; 8) $1 - \sin\dfrac{x}{3} = 0$;

9) $\sqrt{3} - \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$; 10) $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1}{3}$; 11) $\sin^2 x = 1$;

12) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$; 13) $\cos\dfrac{x}{2} = 0$; 14) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$; 15) $\sin 4x = -1$;

16) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = 0$; 17) $\sin 2x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; 18) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

19) $\cos 2x = -\dfrac{1}{2}$; 20) $\cos(x - \pi) = -1$; 21) $\sin(x - 2\pi) + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = 1$;

22) $\dfrac{1}{2}\sin 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$; 23) $3\sin 5x = 0$; 24) $1 - \cos\left(\dfrac{x + \pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$;

25) $\cos 2x = 0{,}1$; 26) $\operatorname{tg} 3x = 4$; 27) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = -1$;

28) $\cos x \cdot \cos 2x = 0$; 29) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$; 30) $2\cos^2 x = 1$.

Б

1) $\cos^2\left(3x + \dfrac{5\pi}{4}\right) = 1$; 2) $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{6} - 2x\right) = \dfrac{1}{2}$; 3) $\sqrt{2}\left|\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)\right| = 1$;

4) $\sqrt{2}\left|\operatorname{tg}\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + 1 = 0$; 5) $\sin\sqrt{x} = 0$; 6) $\sin\dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{2}$; 7) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

8) $\cos(x^2) = -\dfrac{1}{2}$; 9) $\sin\left(\pi x^2 + \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$; 10) $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2} - 3 = 0$.

В

1) $\sin(\sin x) = 0$; 2) $\sin(\cos x) = 1$; 3) $|\sin x| = |\cos x|$; 4) $|\operatorname{tg} x| = \operatorname{tg} x$;
5) $|\operatorname{tg} x| = \operatorname{ctg} x$.

□ Нахождение решений тригонометрических уравнений в данном промежутке

А

6.33. Найдите корни уравнений, принадлежащие указанному промежутку.

1) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, x \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}, x \in (-\pi; \pi)$;

3) $\operatorname{tg} 2x = 1,\ x \in [-1;\ 1]$; 4) $|\cos x| = 1,\ x \in (0;\ 2\pi)$;

5) $2\sin(x+1) = 1,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; 6) $\cos 2x + \sin 2x = 0,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

7) $3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sqrt{3},\ x \in [0;\ \pi]$; 8) $\sin x - 2\cos x = 0,\ x \in \left(\frac{\pi}{4}; 4\right]$;

9) $2\operatorname{tg} x - \sin x = 0,\ x \in [0;\ 10]$; 10) $\sin 2x + \cos x = 0,\ x \in \left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right)$.

Б

6.34. **Найдите наибольший отрицательный корень уравнения.**

1) $\cos x \sin 3x = \sin 2x$; 2) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 2$; 3) $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$;

4) $\cos 6x + \sin 3x = 1$; 5) $\sin 4x - 2\sin 3x = -\sin 2x$; 6) $\cos(\pi x^2) = \frac{1}{2}$.

6.35. **Найдите наименьший положительный корень уравнения.**

1) $\cos 3x - \cos 6x = \sin 9x$; 2) $\cos(\pi x^2) = \frac{1}{2}$; 3) $(2\sin x - 1)\sqrt{x-3} = 0$;

4) $2\sin^4 x - 7\cos^3 x = 2$.

6.36. **Найдите сумму различных корней уравнения на указанном промежутке.**

1) $\cos x = \cos 3x,\ x \in [0;\ 4]$; 2) $\sqrt{1-x^2}\cos 4x = 0,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

В

6.37. **Найдите сумму различных корней уравнения на указанном промежутке.**

1) $\cos^2 2x + \sin^2 3x = 1,\ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $1 - \sin 3x = \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2$,

$x \in [-\pi;\ \pi]$; 3) $\cos 4x + 2\sin^2 x = 0,\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

4) $\operatorname{tg} 3t - \operatorname{tg} t - 4\sin t = 0,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$; 5) $(\sin x)^{-2} + (\cos x)^{-2} = 1$,

$x \in [0;\ 2\pi]$.

6.38. **Найдите наименьший положительный корень уравнения.**

1) $\frac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{1 - \operatorname{ctg}^2 x} = 2\sin^2 x$; 2) $\cos 2x = \cos x - \sin x$.

6.39. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения.

1) $\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{x+4}=\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{x}$; 2) $3\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

□ Решение тригонометрических уравнений с помощью различных преобразований

6.40. Решите уравнения.

А

1) $2\cos^2 x-5\cos x+2=0$; 2) $2\sin^2 x+3\sin x+1=0$;

3) $8\cos^2 x+6\sin x-3=0$; 4) $\cos 2x+5\cos x+3=0$;

5) $\cos 2x-\sin x=0$; 6) $\cos^2 x-\sin x=1$;

7) $9\sin^2 x+9\cos x=5$; 8) $2\sin x+3\cos 2x=3$;

9) $\operatorname{tg}2x+\operatorname{ctg}2x=2$; 10) $\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{ctg}^2 x=4$;

11) $\cos\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\sin x=0$; 12) $2\sin 2x-5\sin 4x=0$;

13) $\sin 3x+\sin x=\sin 2x$; 14) $\cos 9x-\cos 7x+\cos 3x-\cos x=0$;

15) $\sin 3x-3\cos 6x=2$; 16) $\sin(x-6\pi)+\cos\left(\dfrac{9\pi}{2}-x\right)=0$;

17) $\sin^2 x-\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$;

18) $4\sin^2 x-5\sin x\cos x+\cos^2 x=0$;

19) $\dfrac{1}{\sin 2x}+\operatorname{ctg}4x=-\dfrac{3}{2\sin 4x}$; 20) $\sqrt{2x-x^2}(\sin 2x+\cos x)=0$.

Б

1) $\sin^2 x+3\cos^2 x=2\sin 2x$; 2) $\dfrac{1}{\sin^2 x}=\operatorname{ctg}x+3$;

3) $\cos\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+4\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{5}{2}$; 4) $2\cos^2\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=2$;

5) $\cos^2 x+2\sin 2x=2$; 6) $\sin^4 x+\cos^4 x=\cos 4x$;

7) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$; 8) $\sin 2x+\operatorname{tg}x=2$;

9) $\operatorname{tg}^2 x+2\cos 2x=5$; 10) $\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\cos 3x$.

В

1) $\sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{7}{8}$; 2) $4\sin x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=1-\cos 3x$;

3) $\sin x+5\cos x+5=0$; 4) $4\sin^3 x=\sin x-\cos x$;

5) $|4\sin^2 x-3|=2+4\cos 2x$.

Решение простейших тригонометрических неравенств

А

6.41. Решите неравенства.

1) $\sin x \geq 0$; 2) $\cos 2x < 0$; 3) $\cos 2x \geq 1$; 4) $\sin 2x \leq -1$;

5) $\sin x < -\dfrac{1}{2}$; 6) $\sin x > -\dfrac{1}{2}$; 7) $\sin x > \dfrac{1}{4}$; 8) $\cos x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

9) $\cos x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 10) $\cos x > -\dfrac{1}{2}$; 11) $\cos x < \dfrac{1}{3}$; 12) $\sin x < -\dfrac{1}{5}$.

Тригонометрические функции

Период

6.42. Найдите наименьший положительный период функции.

А

1) $y = 2\sin(2x)$; 2) $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; 3) $y = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$; 4) $y = \sin^2 x$;

5) $y = \dfrac{1}{2}\sin(3x)$; 6) $y = \cos\dfrac{x}{2}$; 7) $y = 2\sin\left(\dfrac{2x+\pi}{3}\right)$; 8) $y = -\cos(2x - \pi)$.

Б

1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = 2\cos^2 x - 1$; 3) $y = 1 - 2\sin^2\dfrac{x}{2}$;

4) $y = \cos\dfrac{\pi x}{4}$; 5) $y = \operatorname{tg} x \sin x$; 6) $y = \sin 2x \sin x$; 7) $y = \sin 5x - \cos x$;

8) $y = \cos 2x + \operatorname{tg} x$.

В

1) $y = \sin\dfrac{x}{2} - 2\cos\left(\dfrac{2x}{5}\right)$; 2) $y = \sin 2x - 2\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$;

3) $y = \sin\dfrac{\pi x}{6} + \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{30}$; 4) $y = \cos \pi x + \sin 2x$; 5) $y = \sin\dfrac{x}{7} + \operatorname{tg}\dfrac{x}{5}$;

6) $y = \sin\dfrac{5x}{2} - \cos\dfrac{2x}{5}$; 7) $y = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 3x$; 8) $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{3} + \sin 2\pi x$.

Свойства

6.43. Функция задана на отрезке. Найдите:

а) нули функции;

б) точки максимума и минимума;
в) промежутки монотонности.
Постройте график.

А

1) $y = \sin x,\ x \in \left[-\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $y = \cos x,\ x \in [\pi;\ 3\pi]$;

3) $y = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right],\ x \neq \frac{3\pi}{2}$; 4) $y = \sin x - 1,\ x \in [\pi;\ 5\pi]$.

Б

1) $y = 2\sin x,\ x \in [-3\pi;\ 3\pi]$; 2) $y = \sin 2x,\ x \in [-\pi;\ \pi]$; 3) $y = \cos\frac{x}{2}$, $x \in [-4\pi;\ 4\pi]$; 4) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right),\ x \in [0;\ 2\pi]$.

В

1) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right),\ x \in [0;\ \pi]$; 2) $y = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right),\ x \in \left[-3\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$;

3) $y = -\cos 3x,\ x \in [-\pi;\ 2\pi]$; 4) $y = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right),\ x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$;

5) $y = \cos x + |\cos x|,\ -2\pi \le x \le 2\pi$; 6) $y = \sin^4 x + \cos^4 x,\ -\pi \le x \le \pi$;

7) $y = \log_2 \sin x$; 8) $y = \cos^2 2x,\ -\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$.

Графическое решение тригонометрических уравнений и неравенств

А

6.44. Определите, сколько корней имеет уравнение.
1) $\sin x = 4 - x^2$; 2) $\sin x = 3 - 3x$; 3) $\sin^2 x = -x^2$; 4) $x^2 + 1 - \cos x = 0$;
5) $\cos x = \ln x$; 6) $\cos 2x = |x|$.

Б

6.45. Решите графически неравенство на отрезке.

1) $\sin x > \frac{1}{2},\ \pi \le x \le 3\pi$; 2) $\sin x > \frac{1}{2},\ -\pi \le x \le \pi$; 3) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$, $2\pi \le x \le 4\pi$; 4) $\cos x > -\frac{1}{2},\ -2\pi \le x \le \pi$; 5) $\cos\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2},\ 2\pi \le x \le 3\pi$;

6) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{2},\ 0 \le x \le \frac{7\pi}{2}$.

В

6.46. Решите неравенство.

1) $\sin x > \frac{1}{3}$; 2) $\sin x > -0{,}1$; 3) $\sin x < -\frac{1}{4}$; 4) $\cos x > 0{,}4$;

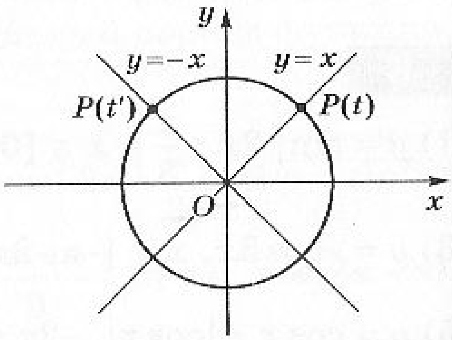
5) $4\cos^2 x - \cos x > 0$; 6) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 < 0$.

Матричные тесты

■ Вращательное движение ■ Тригонометрические функции ■ Тождественные преобразования ■ Тригонометрические неравенства ■ Тригонометрические уравнения

■ Вращательное движение

6.47. Точки $P(t)$ и $P(t')$ расположены на единичной окружности симметрично. Укажите вид этой симметрии для данных значений t и t'.



А

Координаты точек $P(t)$ и $P(t')$	Вид симметрии				
	Симметрия относительно прямой $y = x$	Симметрия относительно начала координат	Симметрия относительно оси Ox	Симметрия относительно оси Oy	Симметрия относительно прямой $y = -x$
$t = \frac{2\pi}{3},\ t' = \frac{5\pi}{6}$					
$t = \frac{\pi}{6},\ t' = \frac{11\pi}{6}$					
$t = \frac{\pi}{3},\ t' = \frac{4\pi}{3}$					
$t = 0,\ t' = \frac{\pi}{2}$					
$t = \frac{\pi}{4},\ t' = \frac{3\pi}{4}$					

Б

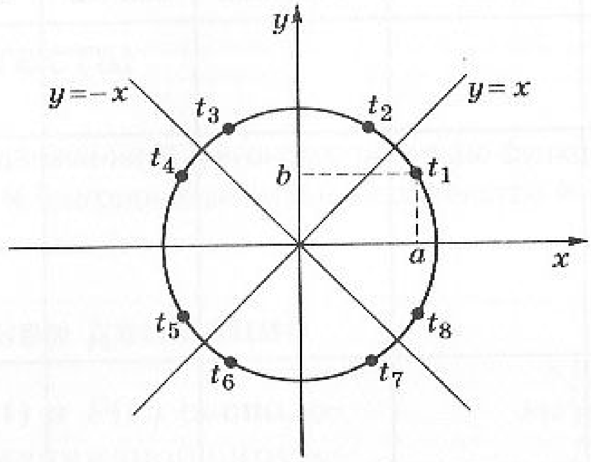
Координаты точек $P(t)$ и $P(t')$	Вид симметрии				
	Симметрия относительно прямой $y = x$	Симметрия относительно начала координат	Симметрия относительно оси Ox	Симметрия относительно оси Oy	Симметрия относительно прямой $y = -x$
$t = \frac{7\pi}{3}$, $t' = -\frac{7\pi}{3}$					
$t = \frac{\pi}{6}$, $t' = \frac{\pi}{3}$					
$t = \frac{\pi}{2}$, $t' = \pi$					
$t = \frac{\pi}{7}$, $t' = \frac{8\pi}{7}$					
$t = \frac{7\pi}{6}$, $t' = -\frac{\pi}{6}$					

В

Координаты точек $P(t)$ и $P(t')$	Вид симметрии				
	Симметрия относительно прямой $y = x$	Симметрия относительно начала координат	Симметрия относительно оси Ox	Симметрия относительно оси Oy	Симметрия относительно прямой $y = -x$
$t = -\frac{11\pi}{3}$, $t' = \frac{20\pi}{3}$					
$t = \frac{6\pi}{5}$, $t' = -\frac{11\pi}{5}$					
$t = \frac{21\pi}{8}$, $t' = \frac{15\pi}{8}$					
$t = \frac{10\pi}{9}$, $t' = \frac{7\pi}{18}$					
$t = -\frac{15\pi}{4}$, $t' = \frac{23\pi}{4}$					

■ Тригонометрические функции

6.48. Числа a и b — координаты точки t_1 на единичной окружности. Выразите значения тригонометрических функций указанных углов через a и b, используя, если нужно, знак «–». (Например, чтобы записать ответ «$-b$», отметьте два столбца — первый и третий.)



А

Тригонометрическая функция	«–»	a	b	$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{a}$
$\sin t_2$					
$\cos t_3$					
$\operatorname{tg} t_4$					
$\operatorname{ctg} t_5$					
$\sin t_6$					

Б

Тригонометрическая функция	«–»	a	b	$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{a}$
$\sin t_4$					
$\cos t_2$					
$\operatorname{tg} t_3$					
$\operatorname{ctg} t_8$					
$\sin t_5$					

В

Тригонометрическая функция	«–»	a	b	$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{a}$
$\sin\left(t_4 - \frac{\pi}{2}\right)$					
$\cos\left(t_7 + \frac{3\pi}{2}\right)$					
$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t_6\right)$					
$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - t_2\right)$					
$\sin(t_3 - \pi)$					

■ Тождественные преобразования

6.49. Какие из выражений A можно преобразовать к указанному виду?

А

Выражение	Многочлен от $\sin x$	Многочлен от $\cos x$	Многочлен от $\sin 2x$	Многочлен от $\cos 2x$
$A = \sin x \cos x$				
$A = \sin^2 x - \cos^2 x$				
$A = \sin^2 x + \sin^2 2x$				
$A = \sin x + \sin 3x$				
$A = \sin x \sin 3x$				

Б

Выражение	Многочлен от $\sin x$	Многочлен от $\cos x$	Многочлен от $\sin 2x$	Многочлен от $\cos 2x$
$A = \sin^2 x \cos^2 x$				
$A = \cos^2 x - \sin^2 x$				
$A = \cos^2 x + \cos 2x$				
$A = \cos x + \cos 2x$				
$A = \sin x \cos 3x$				

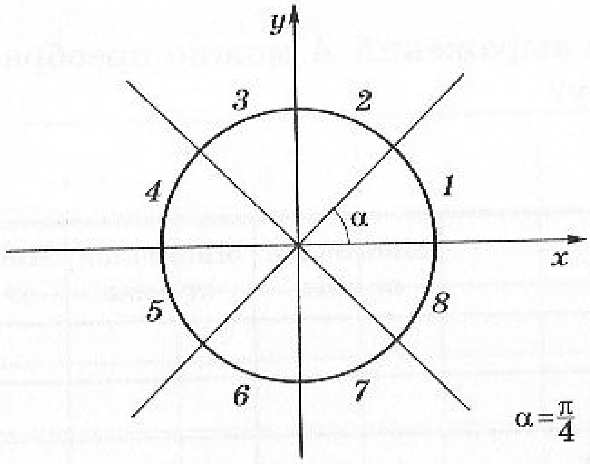
В

Выражение	Многочлен от $\sin x$	Многочлен от $\cos x$	Многочлен от $\sin 2x$	Многочлен от $\cos 2x$
$A = \sin x \cos^2 x$				
$A = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$				
$A = 2\cos^2 x - \sin^2 x$				
$A = \sin x \cos x \cos 2x$				
$A = \cos x \cos 3x$				

Тригонометрические неравенства

6.50. Укажите, для каких дуг выполняются данные неравенства.

А

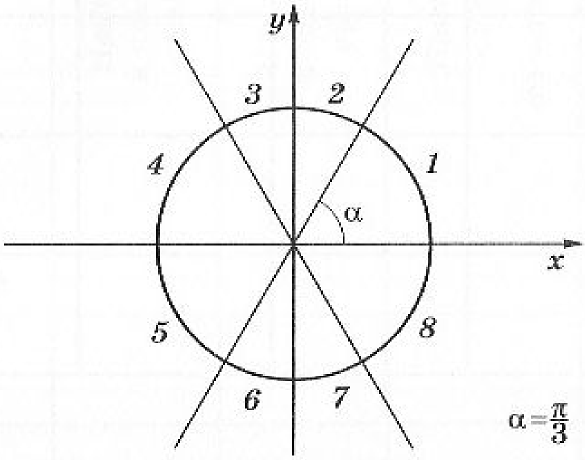


$\alpha = \frac{\pi}{4}$

Дуга	Неравенство				
	$\sin t < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos^2 t > \frac{1}{2}$	$\lvert\sin t\rvert < \frac{\sqrt{2}}{2}$
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					

Дуга	Неравенство				
	$\sin t < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos^2 t > \frac{1}{2}$	$\lvert\sin t\rvert < \frac{\sqrt{2}}{2}$
8					

Б



$\alpha = \frac{\pi}{3}$

Дуга	Неравенство				
	$\sin t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos t > \frac{1}{2}$	$\cos t < -\frac{1}{2}$	$\sin^2 t < \frac{3}{4}$	$\lvert\cos t\rvert > \frac{1}{2}$
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

6.51. **Укажите, на каких из указанных интервалов выполняются данные неравенства.**

Интервал	Неравенство				
	$\sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\cos t} > \frac{1}{2}$	$\lvert\sin t\rvert < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos^2 t < \frac{1}{2}$	$\cos t < \frac{1}{4}$
$\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$					

Интервал	Неравенство				
	$\sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\cos t} > \frac{1}{2}$	$\lvert\sin t\rvert < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos^2 t < \frac{1}{2}$	$\cos t < \frac{1}{4}$
$\left(2\pi; \frac{9\pi}{4}\right)$					
$\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$					
$\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$					
$\left(\frac{19\pi}{4}; \frac{21\pi}{4}\right)$					

В

6.52. Укажите, на каких из указанных интервалов выполняются данные неравенства.

Интервал	Неравенство				
	$\frac{1}{\sin t} < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{\cos t} > -\sqrt{2}$	$\cos t < -\frac{1}{4}$	$\sin t > \lvert\cos t\rvert$	$\cos(t+1) > \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$					
$\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$					
$\left(7\pi; \frac{15\pi}{2}\right)$					
$(6; 7)$					
$\left(3; \frac{5\pi}{4}\right)$					

Тригонометрические уравнения

6.53. Предложите способ решения данного тригонометрического уравнения.

А

Тригонометрическое уравнение	Способ решения уравнения				
	Приведением к квадратному уравнению	Приведением к однородному уравнению	Приведением к уравнению относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$	Разложением на множители	По общим свойствам, графикам
$3\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - \sin x \cos x$					
$3\sin x + 5\cos x = 2$					
$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$					
$3\sin^2 x + \cos x = 1$					
$\cos^2 x - \cos^4 4x = 2$					

Б

Тригонометрическое уравнение	Способ решения уравнения				
	Приведением к квадратному уравнению	Приведением к однородному уравнению	Приведением к уравнению относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$	Разложением на множители	По общим свойствам, графикам
$4\cos^2 x - \sin x \cos x - 1 = 0$					
$6\sin x - \cos x = 1$					
$4\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$					
$\sin^4 x + \sin^6 3x = 2$					
$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$					

В

Тригонометрическое уравнение	Способ решения уравнения				
	Приведением к квадратному уравнению	Приведением к однородному уравнению	Приведением к уравнению относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$	Разложением на множители	По общим свойствам, графикам
$2\sin x - 3\operatorname{tg} x = 1$					
$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 3$					
$2\sin x + 3\cos 4x = 5$					
$3\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 2$					
$(\cos x + \sin x)^3 = \sin^3 x$					

Самостоятельные работы

■ Значения тригонометрических выражений ■ Сравнение тригонометрических выражений ■ Тригонометрические преобразования ■ Тригонометрические тождества ■ Простейшие тригонометрические уравнения ■ Тригонометрические уравнения

■ Значения тригонометрических выражений

6.54. Вычислите значение выражения.

А

Вариант 1

1) $\cos 135° - \sin 240° + \cos 315° + \sin 120°$;

2) $\operatorname{tg} 15° \operatorname{tg} 30° \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 60° \operatorname{tg} 75°$.

Вариант 2

1) $\sin 150° + \sin 300° + \sin 240° - \cos 120°$;

2) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7} + \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{ctg}\frac{6\pi}{7}$.

Б

1) $\cos 40° + \cos 65° + \cos 90° + \cos 115° + \cos 140°$;

2) $\sin^2 10° + \sin^2 20° + \sin^2 30° + ... + \sin^2 90°$.

В

1) $\sin 25° + \sin 50° + \sin 180° + \sin 205° + \sin 230°$;

2) $\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$.

6.55. Известно, что $\sin^4 x + \cos^4 x = k$. Вычислите $\sin^6 x + \cos^6 x$.

Б

$k = \frac{5}{8}$.

В

$k = \frac{1}{2}$.

■ Сравнение тригонометрических выражений

6.56. Расположите величины в порядке возрастания.

А

Вариант 1

$\sin 40°$; $\sin 80°$; $\sin 120°$; $\sin 160°$; $\sin 200°$.

Вариант 2

$\sin 40°$; $\cos 80°$; $\cos 120°$; $\cos 160°$; $\cos 210°$.

6.57. Расположите величины в порядке убывания.

Б

Вариант 1

$\cos 1{,}5$; $\cos 2{,}5$; $\cos 3{,}5$; $\cos 4{,}5$.

Вариант 2

$\sin 1{,}5$; $\sin 2{,}5$; $\sin 3{,}5$; $\sin 4{,}5$.

Тригонометрические преобразования

6.58. Упростите выражение.

А

Вариант 1

1) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$; 2) $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 2}{\sin(1+\alpha)}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}$.

Вариант 2

1) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)+\sin^2\beta$; 2) $\dfrac{\cos 4\alpha-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{8}\right)}$; 3) $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}3\beta}{\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{tg}3\beta}$.

Б

1) $\dfrac{1-\operatorname{ctg}(\pi-2\alpha)\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{ctg}\alpha}$; 2) $\cos^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$;

3) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{\alpha}{4}\right)-\cos^2\left(\frac{11\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)$.

В

1) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-1}{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)+1}$; 2) $\dfrac{\sin(80^\circ+4\alpha)}{4\sin(20^\circ+\alpha)\sin(70^\circ-\alpha)}$;

3) $\sqrt{(1-\sin\alpha\sin\beta)^2 - H}$, $H = \cos^2\alpha\cos^2\beta$.

■ Тригонометрические тождества

6.59. Докажите тождество.

А

Вариант 1

1) $\dfrac{1}{\sin\alpha} + \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$; 2) $\dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}^2 3\alpha - 1}\dfrac{1-\operatorname{ctg}^2 3\alpha}{\operatorname{ctg}3\alpha} = 1$.

Вариант 2

1) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}2\alpha = \dfrac{1}{\sin 2\alpha}$; 2) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = \operatorname{ctg}\dfrac{\beta-\alpha}{2}$;

3) $\dfrac{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{1+\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{tg}\alpha - 1}$.

Б

1) $\sin 3x = 4\sin x\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$;

3) $\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha} = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}, 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

В

1) $\dfrac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} - \dfrac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = 8\cos 2x$; 2) $4\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - \alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right) = \dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$;

3) $\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{1}{\cos\alpha} - 1 = \dfrac{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}$.

■ Простейшие тригонометрические уравнения

6.60. Решите уравнение на указанном промежутке.

А

Вариант 1

1) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in (0; \pi)$;

3) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, $x \in (0; 2\pi)$.

Вариант 2

1) $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$; 2) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x \in (0; 2\pi)$;

3) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Б

1) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in \left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right)$; 2) $\cos(1 - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in (5; 7)$;

3) $\operatorname{tg}(2x - 3) = -1$, $x \in (10; 11)$.

В

1) $\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$, $x \in \left(\frac{7\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}\right)$; 2) $\sin(2 - x) = \frac{1}{2}$, $x \in (-1; 4)$;

3) $\operatorname{ctg}(3x - 2) = 1$, $x \in (3; 4)$.

6.61. Решите уравнения.

А

Вариант 1

1) $\sin 3x \operatorname{ctg} x = 0$; 2) $\sin x + \sin 3x = 0$; 3) $\sin 2x + \cos x = 0$.

Вариант 2

1) $(\cos 2x - 1)\operatorname{tg} x = 0$; 2) $\cos 4x - \cos x = 0$; 3) $\operatorname{tg} x - 2\sin x = 0$.

Б

1) $\sin 3x = -\cos x$; 2) $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$;

3) $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 2\sin 5x$.

В

1) $\cos 4x = \sin x$; 2) $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos x$;

3) $\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2}\cos 5x$.

■ Тригонометрические уравнения

6.62. Решите уравнения.

А

Вариант 1

1) $3\sin^2 x + \cos^2 x = 5\cos x$; 2) $\dfrac{5}{2\sin x + 1} + \sin x = 3$;

3) $\sin x + 2\cos x = 0$.

Вариант 2

1) $\sin^2 x = 2\cos^2 x + 2\cos x$; 2) $\dfrac{1}{\cos x - 1} + \cos x + 2 = 0$;

3) $3\sin x - \cos x = 0$.

Б

1) $\sin x \operatorname{tg} x = \dfrac{3}{2}$; 2) $2\sin^2 x + 5\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$;

3) $\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{tg} 2x = \dfrac{2}{3}\operatorname{tg} 4x$.

В

1) $\cos^2 x - 4\cos^2 \dfrac{x}{2} - 1 = 0$; 2) $3\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 7\cos^2 x = 0$;

3) $1 - \cos x = 2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Контрольные тесты с выбором ответа

■ Значения тригонометрических выражений ■ Связь между значениями тригонометрических функций ■ Знаки тригонометрических функций ■ Формулы приведения ■ Преобразования тригонометрических выражений ■ Двойной и половинный углы ■ Формулы сложения ■ Общее решение тригонометрического уравнения ■ Решение тригонометрического уравнения в заданном промежутке

■ Значения тригонометрических выражений

6.63. Вычислите значение выражения.

А

$2\cos(-60^\circ) - 3\sin(-30^\circ) + \operatorname{tg}(-45^\circ)$

а	б	в	г
$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Б

$\operatorname{tg}\left(-\frac{13\pi}{6}\right) + \cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right) - \frac{2}{3}\sin\frac{4\pi}{3}$

а	б	в	г
$\frac{5}{6}\sqrt{3} - \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}$

В

$\sin 750^\circ \cos 420^\circ \operatorname{tg} 1\,020^\circ$

а	б	в	г
$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{12}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$

■ Связь между значениями тригонометрических функций

6.64. Найдите значение выражения, используя данную информацию.

А

Найдите $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$ и угол α лежит в первой четверти.

а	б	в	г
1	$\frac{3}{\sqrt{10}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Б

Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ и $\cos\alpha > 0$.

а	б	в	г
$-\sqrt{5}$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$

В

Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos 2\alpha = \frac{1}{8}$.

а	б	в	г
± 1	$\frac{7}{9}$	$\pm\frac{\sqrt{7}}{3}$	-1

■ Знаки тригонометрических функций

6.65. Выберите среди тригонометрических выражений положительные.

А

$\sin 100°$ и $\cos\frac{9\pi}{8}$.

а	б	в	г
Первое	Второе	Оба	Ни одно из них

Б

$\sin\frac{11\pi}{7}\operatorname{tg}100°$ и $\cos 200°\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{5}$

а	б	в	г
Первое	Второе	Оба	Ни одно из них

В

$\sin 100° + \cos 100°$ и $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{7} + \operatorname{ctg}\frac{13\pi}{7}$

а	б	в	г
Первое	Второе	Оба	Ни одно из них

Формулы приведения

6.66. Вычислите значение выражения.

А

$\sin 750° + \cos 420°$

а	б	в	г
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

Б

$2(\operatorname{tg}195° + \operatorname{ctg}15°)$

а	б	в	г
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	4	8	$\frac{4}{\sqrt{3}}$

В

$\mathrm{tg}\,765° + \mathrm{tg}\,780° + \mathrm{tg}\,795° - \mathrm{tg}\,405°\,\mathrm{tg}\,420° - \mathrm{tg}\,435°$

а	б	в	г
$1+\sqrt{3}$	1	3	0

■ Преобразования тригонометрических выражений

6.67. Упростите выражение.

А

$\cos^2\alpha + \sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha$

а	б	в	г
$1+\cos^2\alpha$	$1+\sin^2\alpha$	1	$\cos^4\alpha$

Б

$$\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha} - \frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha}$$

а	б	в	г
0	$\cos 2\alpha$	1	$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

В

$$\frac{\sin(0{,}25\pi - \alpha)}{\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}},\ 0{,}5\pi < \alpha < \pi$$

а	б	в	г
$\frac{\sqrt{2}}{2\cos\alpha}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

■ Двойной и половинный углы

6.68. Упростите выражение.

А

$$\frac{1-\sin 2\alpha}{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}$$

а	б	в	г
0	1	$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$

Б

$$\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$$

а	б	в	г
$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	1	0

В

$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$

а	б	в	г
$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{8}$

■ Формулы сложения

6.69. Вычислите значение выражения.

А

$\cos 16^\circ \sin 37^\circ \cos 37^\circ + 0{,}5 \sin 16^\circ \cos 74^\circ$

а	б	в	г
$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$

Б

$$\frac{3\left(\cos^2 20^\circ-\sin^2 80^\circ\right)}{\sin^2 10^\circ}$$

а	б	в	г
$3\sin 10°$	3	$-\dfrac{3}{2\sin 10°}$	$\dfrac{3}{2}$

В

$\cos(\alpha - \beta)$, если $\cos\alpha + \cos\beta = \dfrac{1}{2}$; $\sin\alpha + \sin\beta = \dfrac{1}{2}$

а	б	в	г
$-\dfrac{5}{6}$	$-\dfrac{3}{4}$	1	Определить нельзя

■ Общее решение тригонометрического уравнения

6.70. Решите уравнение (в ответах n — произвольное целое число).

А

$2\sin x - \sin^2 x = \cos^2 x$

а	б	в	г
$\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$	$\pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$	$(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n$	$(-1)^n \dfrac{\pi}{3} + \pi n$

Б

$\sin^4 x = \cos^4 x$

а	б	в	г
$\dfrac{\pi}{2} + \pi n$	$\dfrac{\pi}{2} n$	$\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} n$	πn

В

$\cos 2x + 3\cos x = 1$

а	б	в	г
$\dfrac{\pi}{6} + \pi n$	$\pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$	$\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$	$\dfrac{\pi}{3} + \pi n$

■ Решение тригонометрического уравнения в заданном промежутке

6.71. Найдите корни уравнения в заданном промежутке.

А

$\sin 2x - 4\sin x = 0, \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

а	б	в	г
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Б

$1 - \cos^2 x = 2\sin x, \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

а	б	в	г
2π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$

В

$\sin 4x + \sin 7x + \sin 10x = 0, \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

а	б	в	г
$0; \frac{\pi}{7}; \frac{2\pi}{15}; \frac{4\pi}{15}$	$0; \frac{\pi}{7}; \frac{2\pi}{9}$	$0; \frac{\pi}{7}; \frac{2\pi}{15}$	$0; \frac{\pi}{7}; \frac{2\pi}{7}; \frac{2\pi}{15}$

ГЛАВА 7

Функции и графики

Тренажеры

■ Общие свойства зависимостей и функций ■ Определение функции ■ График функции ■ Линейные и дробно-линейные функции ■ Квадратичные функции ■ Многочлены и рациональные функции ■ Степенные, показательные и логарифмические функции ■ Тригонометрические функции

■ Общие свойства зависимостей и функций

□ Построение графика зависимости

7.1. Даны уравнения зависимостей. Постройте их графики.

А

1) $y = 3x$; 2) $x = \frac{1}{3}y$; 3) $x + 3y = 1$; 4) $3x - y = 2$; 5) $y = \frac{3}{x}$;

6) $x = -\frac{1}{4}$; 7) $-xy = 2$; 8) $4y = -x^2$; 9) $x = 5y^2$; 10) $x^2 + y^2 = 4$.

Б

1) $y = \frac{x}{2} - 1$; 2) $3x + 2y = 1$; 3) $y = x^2 + x$; 4) $x^2 + 4x + y^2 - 2y = 0$;

5) $x = -2y + 5$; 6) $y = \frac{x}{x-1}$; 7) $y^2 + 2y = x - 1$; 8) $2x^2 - 3y = 1$;

9) $(x - 7)(y + 2) = 1$; 10) $(x - 1)^2 + y^2 = 16$.

В

1) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$; 2) $xy + x + y = 1$; 3) $y = -3x^2 + x + 1$; 4) $y^2 = x^4$;

5) $x^2 = y^2$; 6) $x = \frac{y+1}{2y-3}$; 7) $x^2 + y^2 + 7x - y = 0$; 8) $x^2 + 5xy - 2y^2 = 0$;

9) $x - 2 = -\frac{1}{y+1}$; 10) $x^2 - y^2 = 1$.

☐ Определение параметров зависимости

А

7.2. Известен вид зависимости и точки, лежащие на ее графике. Найдите неизвестные коэффициенты. Постройте график.

1) $y = kx + b$:

а) $P_1(-1; 1)$, $P_2(-2; -1)$; б) $P_1(2; 3)$, $P_2(3; 2)$; в) $P_1(-2; 4)$, $P_2\left(1; \dfrac{5}{2}\right)$.

2) $y = \dfrac{k}{x} + b$:

а) $P_1\left(\dfrac{1}{2}; 3\right)$; $P_2(-1; 0)$; б) $P_1(2; -1)$, $P_2(1; -2)$; в) $P_1(1; -1)$, $P_2\left(\dfrac{1}{3}; 0\right)$.

3) $x^2 + y^2 + ax + by = 0$:

а) $P_1(1; 1)$, $P_2(1; 2)$; б) $P_1(-1; 3)$, $P_2(1; -1)$.

4) $y = x^2 + px + q$:

а) $P_1(-1; 3)$, $P_2(-4; 0)$; б) $P_1(-3; 10)$, $P_2(1; -2)$.

Б

7.3. Известно, что зависимость имеет один из трех видов: $\dfrac{y}{x} = k$, $xy = k$ или $y = kx^2$. Определите вид зависимости и постройте ее график, если известны координаты двух точек на графике.

1) $P_1(2; -3)$, $P_2(-6; 1)$; 2) $P_1(4; -2)$, $P_2\left(-1; \dfrac{1}{2}\right)$;

3) $P_1\left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$, $P_2\left(-\dfrac{3}{2}; 9\right)$; 4) $P_1(2; -2)$, $P_2(4; -8)$;

5) $P_1\left(-\dfrac{1}{2}; 4\right)$, $P_2\left(3; -\dfrac{2}{3}\right)$; 6) $P_1\left(2; -\dfrac{1}{3}\right)$, $P_2(-6; 1)$.

В

7.4. Зависимость имеет вид $ax^2 + by^2 + x - 2y - 7 = 0$. Известны две точки на ее графике. Найдите вид зависимости и постройте ее график.

1) $P_1(1; 2)$, $P_2(1; -1)$; 2) $P_1\left(2; \dfrac{3}{2}\right)$, $P_2(-1; -3)$;

3) $P_1(3; -2)$, $P_2(-1; -4)$; 4) $P_1(-1; -1)$, $P_2\left(-1; \dfrac{5}{3}\right)$;

5) $P_1(3; -11)$, $P_2(-1; -10)$; 6) $P_1(1; 1)$, $P_2(-2; 1)$.

☐ Функциональный характер зависимости

7.5. Дана зависимость между переменными x и y. В тех случаях, когда она определяет y как функцию от x, определите эту функцию. Во всех случаях постройте график зависимости. Как по графику определить, является ли y функцией от x?

А

1) $5x + 3y = 1$; 2) $x + y^2 = 7$; 3) $xy + 7x - y = 0$; 4) $x^2 + x = 6y + 1$;

5) $2x + 0 \cdot y = 3$; 6) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{x}$.

Б

1) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 0$; 2) $y + |x| = 2$; 3) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{x-1}$; 4) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{x+1}{y+1}$;

5) $x^2 + y^2 + 0{,}5x + y = 0$; 6) $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 1$.

В

1) $\dfrac{x - 2y + 1}{2x - y + 3} = 2$; 2) $y^2 + 1{,}5xy - 4{,}5x^2 = 0$;

3) $(2x - 3)(3y + 1) = (3x + 1)(2y - 5)$; 4) $|x + y + 2| = 3$, $x + y \le -2$;

5) $x^2 + x + y^2 = 1$, $y \ge 0$; 6) $y^2 + x = 0$, $y \le -1$.

■ Определение функции

☐ Вычисление значения функции

7.6. Дана функция $y = f(x)$. Вычислите ее значение при указанных значениях x.

А

1) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, $x = 1$, $x = \dfrac{t}{2}$; 2) $f(x) = \dfrac{x-3}{2x-5}$, $x = -3$, $x = t + 1$;

3) $f(x) = \sqrt{x^2+9}$, $x = -4$, $x = \sqrt{t}$; 4) $f(x) = 4^x - 1$, $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{t}{2}$;

5) $f(x) = \sqrt{x + \dfrac{1}{x}}$, $x = 1$, $x = \dfrac{1}{t}$.

Б

1) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, $x=\dfrac{3}{5}$, $x=\dfrac{1}{t}$; 2) $f(x)=\dfrac{x-3}{2x-5}$, $x=0{,}25$, $x=\dfrac{t}{t+1}$; 3) $f(x)=\sqrt{x^2+9}$, $x=1{,}1$, $x=t-\dfrac{1}{t}$; 4) $f(x)=4^x-1$, $x=1{,}5$, $x=\log_2 t$; 5) $f(x)=\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}$, $x=0{,}1$, $x=t+\dfrac{1}{t}$.

В

1) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, $x=\sqrt{2}$, $x=\sqrt{t-1}$; 2) $f(x)=\dfrac{x-3}{2x-5}$, $x=2{,}5$, $x=\dfrac{t-3}{2t-5}$; 3) $f(x)=\sqrt{x^2+9}$, $x=0{,}1$, $x=\dfrac{t}{t-1}$; 4) $f(x)=4^x-1$, $x=\log_2 3$, $x=-\log_2 t$; 5) $f(x)=\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}$, $x=-1$, $x=t-\dfrac{1}{t}$.

□ Область определения функции

7.7. Найдите область определения функции $y=f(x)$.

А

1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$; 2) $f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$; 3) $f(x)=\sqrt{2-x}$; 4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$; 5) $f(x)=2^{-x}$.

Б

1) $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+x-2}}$; 2) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$; 3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}-2}$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{2^x-\dfrac{1}{2}}$.

В

1) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2+x-1}}$; 2) $f(x)=\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{x+1}}$; 3) $f(x)=\lg\dfrac{x}{\sqrt{x}-3}$; 4) $f(x)=\ln\dfrac{x}{x^6-9}$; 5) $f(x)=\sqrt{2^x-1}$.

□ Построение сложной функции

7.8. Дана функция $y = f(x)$. Постройте сложную функцию $y = g(x)$ для указанной функции g.

А

1) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$:

а) $g(x) = f(-x)$; б) $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$; в) $g(x) = f(1-x)$;

2) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$:

а) $g(x) = f(-x)$; б) $g(x) = f(x+1)$; в) $g(x) = f\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$.

Б

1) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$:

а) $g(x) = f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$; б) $g(x) = f\left(\sqrt{x}\right)$; в) $g(x) = f(f(x))$.

2) $f(x) = \begin{cases} x \text{ при } x \ge 0, \\ 0 \text{ при } x < 0: \end{cases}$

а) $g(x) = f\left(\sqrt{x}\right)$; б) $g(x) = f\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)$; в) $g(x) = f(x^2+2x)$.

В

1) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$:

а) $g(x) = f\left(x\sqrt{x}\right)$; б) $g(x) = f(2^x)$; в) $g(x) = f(f(x-1))$.

2) $f(x) = \begin{cases} x \text{ при } x \ge 0, \\ 0 \text{ при } x < 0: \end{cases}$

а) $g(x) = f\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$; б) $g(x) = f(f(x+1))$; в) $g(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$.

□ Обратная функция

7.9. Дана функция $y = f(x)$ с указанной областью определения. Запишите обратную к ней функцию в виде $y = h(x)$, указав ее область определения D. Постройте на одном чертеже графики функций f и g.

А

1) $f(x) = 2x - 3$, D: R; 2) $f(x) = 2x + 1$, D: $x \geq 0$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, D: $x \leq 3$, $x \neq 2$; 4) $f(x) = x^2$, D: $(-\infty; 0]$;

5) $f(x) = \sqrt{x-1}$, D: $[1; +\infty)$;

Б

1) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$, D: $x \neq 3$; 2) $f(x) = \sqrt{2-x}$, D: $[-2; 2]$;

3) $f(x) = x^2 + x$, D: $x \geq 0$; 4) $f(x) = \sqrt{x^2+2x+1}$, D: $x \leq -1$;

5) $f(x) = |2x - 1|$, D: $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right]$.

В

1) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+2}$, D: $[0; +\infty)$; 2) $f(x) = x^2 + x + 1$, D: $(-\infty; -1]$;

3) $f(x) = |2x - 1|$, D: $|x| \leq \dfrac{1}{2}$; 4) $f(x) = \begin{cases} 2x \text{ при } x \geq 0, \\ \dfrac{x}{3} \text{ при } x < 0; \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} -x-1 \text{ при } x < 0, \\ -(x-1)^{0,5} \text{ при } x \geq 0. \end{cases}$

☐ Четность функции

7.10. Исследуйте функции $y = f(x)$ на четность.

А

1) $f(x) = -5x$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; 3) $f(x) = x^4 - x^2 + 1$; 4) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$;

5) $f(x) = |x|$; 6) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$; 7) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$; 8) $f(x) = x^3 \cos x$;

9) $f(x) = \sin x - x^3$; 10) $f(x) = 1 - \cos x + \sin x$.

Б

1) $f(x) = (x^3 - 7)x$; 2) $f(x) = \sqrt{2x^2} + 6x$; 3) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$;

4) $f(x) = 2|x| + 3$; 5) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$; 6) $f(x) = 2^x - 7^{-x}$; 7) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$;

8) $f(x) = \sin^2 \dfrac{x}{12}$; 9) $f(x) = x^3 + \cos^3 x$; 10) $f(x) = \ln \sin^2 x$.

В

1) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$; 2) $f(x) = x^2 - |1 - x|$; 3) $f(x) = \dfrac{x}{x^3 + x}$;

4) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + x}$; 5) $f(x) = 2^{|x|+1}$; 6) $f(x) = \begin{cases} x \text{ при } x \neq 0, \\ 1 \text{ при } x = 0; \end{cases}$

7) $f(x) = [x]$; 8) $f(x) = \sqrt{\sin x}$; 9) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x + 1}$;

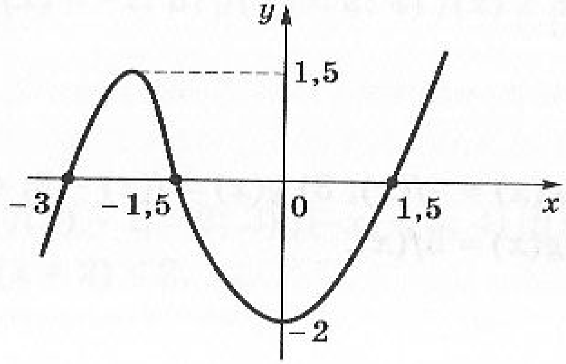
$$10)\ f(x) = \begin{cases} \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right), x \geq 0, \\ \cos\left(\dfrac{3\pi}{4} + x\right), x < 0. \end{cases}$$

График функции

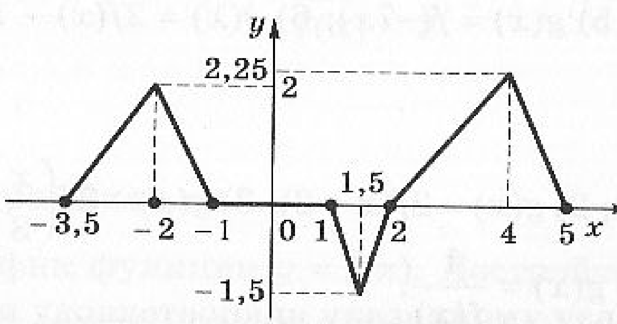
7.11. Дан график функции $y = f(x)$. Определите по графику:

а) область определения функции; б) множество значений функции; в) промежутки монотонности; г) нули функции; д) промежутки знакопостоянства; е) точки экстремума; ж) наибольшее и наименьшее значения; з) симметрию графика.

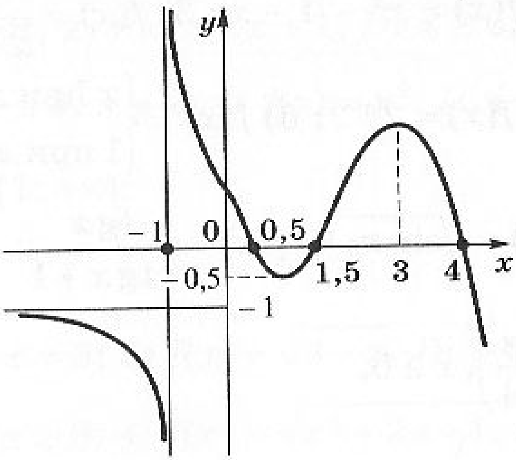
А



Б

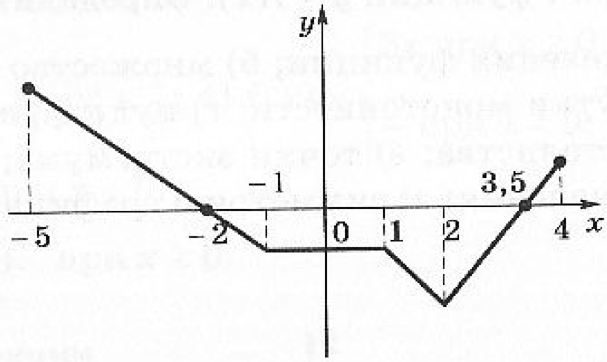


В



□ Преобразование графика

7.12. Дан график функции $y = f(x)$. Постройте график функции $y = g(x)$ при указанных g.



А

1) $g(x) = f(-x)$; 2) $g(x) = -f(x)$; 3) $g(x) = f(x) - 2$; 4) $g(x) = f(x + 1)$;
5) $g(x) = f(2x)$; 6) $g(x) = 5f(x)$.

Б

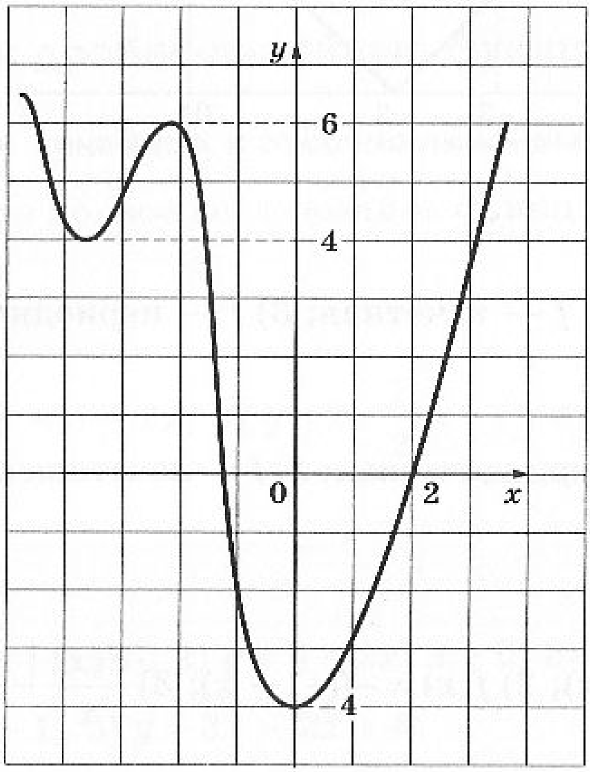
1) $g(x) = f(-x) + 2$; 2) $g(x) = -f(x - 1)$; 3) $g(x) = f(5 - 4x)$;
4) $g(x) = -\dfrac{1}{2}f(x)$; 5) $g(x) = f(-7x)$; 6) $g(x) = 2f(x) - 1$.

В

1) $g(x) = f(3 - 2x)$; 2) $g(x) = 2f(x - 2)$; 3) $g(x) = 3f\left(\dfrac{x}{3}\right)$; 4) $g(x) = |f(x)|$;
5) $g(x) = f(|x|)$; 6) $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

☐ Решение уравнений и неравенств по графику

7.13. Дан график функции $y = f(x)$. Решите по графику указанные уравнения и неравенства.



А

4. 1) $f(x) = 1$; 2) $f(x) = -1$; 3) $|f(x)| = 2$; 4) $f(x) \geq 3$; 5) $f(x) < -2$; 6) $|f(x)| \geq 1$.

Б

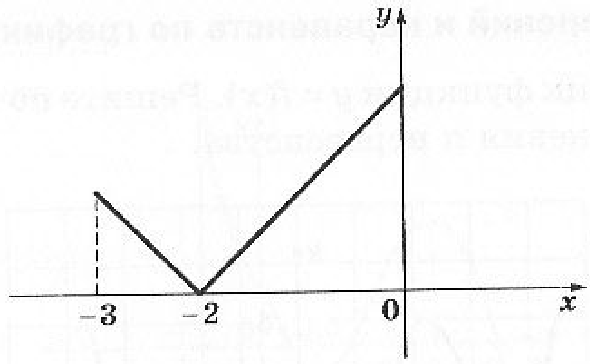
1) $f(x - 5) = 1$; 2) $|f(x) - 1| = 2$; 3) $f(-x) = 3$; 4) $|f(x) + 1| \leq -1$; 5) $-2f(x) < 3$; 6) $f(x + 2) \leq 2$.

В

1) $f(x) = x$; 2) $\sqrt{f(x)} = x$; 3) $f(x) + \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{5}{2}$; 4) $x + f(x) \geq 0$; 5) $\dfrac{f(x)}{x-1} \geq 0$; 6) $\sqrt{f(x)} \leq 2$.

☐ Симметрия графика

7.14. Дан график функции $y = f(x)$. Достройте его так, чтобы функция удовлетворяла указанному условию.



А

1) f — четная; 2) f — нечетная; 3) f — периодическая.

Б

1) f — четная и периодическая; 2) f — нечетная и периодическая; 3) $f(x) + f(-x) = 2$.

В

1) $f(-x) = f(-2 - x)$; 2) $f(x) = -f(-1 - x)$; 3) $\dfrac{f(x)}{x}$ — четная.

□ Построение графика функции по ее описанию

7.15. Постройте график функции, заданной ее описанием.

А

1) $y = \operatorname{sgn} x$ (сигнум x, знак x). Эта функция определена при всех вещественных x и принимает следующие значения: -1 при $x < 0$, 0 при $x = 0$, 1 при $x > 0$.
2) *Ступенька.* Функция принимает значение 1 при $x \in [0; 1]$ и равна нулю во всех других точках.

Б

1) $y = [x]$ (целая часть x, антье от x; $[x]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее x, например, $[3] = 3$; $[3{,}1] = 3$; $[-2{,}9] = -3$).
2) $y = \{x\}$ (дробная часть x; по определению $x = [x] + \{x\}$).

В

1) *Гребенка.* Функция в целых точках n принимает значения -1 при нечетных n, $+1$ — при четных n. Между целыми значениями она линейна.

2) Функция f определена при всех вещественных x, четна, $f(0) = 1$, убывает при $x \in [0; +\infty)$, ее множество значений — промежуток $(0; 1]$.

■ Линейные и дробно-линейные функции

□ Исследование линейных и кусочно-линейных функций

7.16. Проведите полное исследование функции и постройте ее график.

А

1) $y = x + 4$; 2) $y = 5 - 2x$; 3) $y = 2 - \frac{1}{2}(x - 1)$; 4) $y = (x + 1)^2 - x^2$;

5) $y = |2x - 3|$.

Б

1) $y = 3x + 2$; $x \in [-1; 3]$; 2) $y = 5 - 2x$; $x \geq 0$; 3) $y = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$;

4) $y = |3-x| + |2x - 1|$; 5) $y = 3x - |2x + 4|$.

В

1) $y = \begin{cases} 2x + 1 \text{ при } x \geq -1, \\ -x - 2 \text{ при } x < -1; \end{cases}$ 2) $y = |5x - 2| - |x + 1|$;

3) $y = |x| + |x + 2| + |x - 3|$; 4) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$; 5) $y = ||x| - 1|$.

□ Решение линейных уравнений и неравенств

7.17. Решите уравнения и неравенства, приводящиеся к линейным относительно x.

А

1) $\frac{x - 1}{2} + \frac{x + 1}{3} = 1$; 2) $9x^2 = (3x - 2)^2$; 3) $|x + 2| = 5$; 4) $5 - 3x \geq 0$;

5) $3 \leq 7x - 1 \leq 5$.

Б

1) $(x + 2)(x + 3) = (x + 4)(x - 1)$; 2) $(x - 1)x(x + 1) = x^3 + 2x - 8$;

3) $|2x + 1| = 3 - x$; 4) $|x + 3| \leq 5$; 5) $|x| - |0{,}5x - 3| > -1$.

В

1) $ax-5=3x+4$; 2) $\frac{1}{2}(x-2a)=\frac{x+a}{2}-\frac{x-3a}{4}$; 3) $(a+1)x=3(x-a)$;

4) $ax \le x-1$; 5) $|x-3| \ge a+1$.

□ Исследование дробно-линейных функций

7.18. Проведите полное исследование функции и постройте ее график.

А

1) $y=\frac{1}{x+2}$; 2) $y=2-\frac{1}{x}$; 3) $y=\frac{x}{x-3}$; 4) $y=\frac{2}{1-x}$; 5) $y=\frac{3}{x+2}$.

Б

1) $y=\frac{2}{x}$, $|x| \le 4$; 2) $y=\frac{|x+1|}{2x-5}$; 3) $y=\frac{x+1}{|2x-5|}$; 4) $y=\frac{2x^2}{3-x}+2x$;

5) $y=\frac{2x-1}{4-8x}$.

В

1) $y=\left|1-\frac{1}{x}\right|$, $|x| \ge 2$; 2) $y=\frac{3|x|-x}{|x+1|+x}$; 3) $y=\left|\frac{|x|-1}{|x|-2}\right|$; 4) $y=\frac{1}{1-\frac{5}{x}}$;

5) $y=\frac{(x-1)^2}{4x^2+x-5}$.

■ Квадратичные функции

□ Исследование квадратичной функции

7.19. Проведите полное исследование функции и постройте ее график.

А

1) $y=x^2-3$; 2) $y=2x-x^2$; 3) $y=(5x+1)^2-1$; 4) $y=6-7x-x^2$;
5) $y=(x+1)^3-x^3$.

Б

1) $y=x^2+2x$, $x \in [-2;1]$; 2) $y=x^2-x$, $x \in [1;2]$; 3) $y=x^2-6x+1$,

$x \in [0; 4]$; 4) $y = 2 - x - x^2$, $x \in [-7; 3]$; 5) $y = \dfrac{x^3 - x}{x-1}$.

В

1) $y = |x^2 - 9|$; 2) $y = x^2 - \left|2x^2 - \dfrac{1}{2}\right|$; 3) $y = 2x^2 + |x| - 3$;

4) $y = x^2 + x + 1 + \dfrac{2\left(x^2 - 2x + 1\right)}{x-1}$; 5) $y = ||x^2 - 4| - 3|$.

□ Решение рациональных уравнений

7.20. Решите уравнение.

А

1) $x^2 - x = 20$; 2) $\dfrac{1}{2x+3} - \dfrac{1}{3x-1} = 1$; 3) $x^4 + 6x^2 + 9 = 0$;

4) $x^4 + 5x^2 + 7 = 0$; 5) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$;

6) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$; 7) $\dfrac{1}{x^2 - x} + \dfrac{1}{x^2 - x + 2} = \dfrac{7}{24}$;

8) $x^3 - x^2 - \dfrac{8}{x^3 - x^2} = 2$.

Б

1) $\dfrac{x-7}{3} = \dfrac{5}{x+7}$; 2) $\dfrac{3x}{x-2} - \dfrac{3}{x+3} = \dfrac{6}{2-x}$; 3) $|x^4 - 4x^2 - 165| = 0$;

4) $|x^2 - x - 12| = 6$; 5) $2x^3 + 7x^2 - 5x - 4 = 0$;

6) $x(x+1)(x+2) \cdot (x+3) = 120$; 7) $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = 6\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$;

8) $\dfrac{6}{(x+1)(x+2)} + \dfrac{8}{(x-1)(x+4)} = 1$.

В

1) $x(x+1)^2 = x^3 + 6$; 2) $x^2 + 2x + a = 0$; 3) $x^2 + ax + 1 = 0$;

4) $ax^2 - 2x + 3 = 0$; 5) $x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0$;

6) $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$; 7) $\dfrac{x^2+1}{x+1} + \dfrac{x^2+2}{x+2} = 2$;

8) $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 = 90$.

□ Решение рациональных неравенств

7.21. Решите неравенство.

А

1) $x^2 - 2x < 0$; 2) $x^2 + 5x + 4 \geq 0$; 3) $x^2 \leq 3x - 4$;

4) $(5x + 1)^2 \leq (x - 2)^2$; 5) $x^3 - 5x \geq 0$; 6) $\frac{x(x-1)}{(x+2)(x-3)} < 0$;

7) $\frac{x^2 + 6x + 2}{2x - 3} > 1$.

Б

1) $\frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{5}x \geq 1$; 2) $(x + 5)(x + 3) < 6$;

3) $(x^2 - 1)(x^2 + 3) \leq (x^2 + 5)(x^2 + 1)$;

4) $\frac{x}{x^2 + x + 1} \geq \frac{2}{7}$; 5) $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \leq 0$; 6) $\frac{9 - x^2}{4x^4 - 25} \geq 0$;

7) $\frac{2(x-3)}{x(x-6)} \leq \frac{1}{x-1}$.

В

1) $x^2 + 2x + a \leq 0$; 2) $ax^2 \leq \frac{1}{a}$; 3) $x^2 - x - ax + a \geq 0$;

4) $x^2 - 3ax + 2a^2 < 0$; 5) $x^4 - 6x^2 + 4 \geq 0$; 6) $\frac{x^3(x-3)}{(x+1)^2} > 0$;

7) $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x} - \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} \geq \frac{3}{2}$.

■ Многочлены и рациональные функции

□ Исследование рациональных функций

7.22. Постройте график функции. Проведите полное исследование функции, опираясь на график в тех случаях, когда вы затрудняетесь это сделать, используя формулу.

Б

1) $y = x^3 - 9x$; 2) $y = x^4 - 16x^2$; 3) $y = 4x + \frac{1}{x}$; 4) $y = x - \frac{1}{x}$;

5) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$; 6) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$.

В

1) $y = x^3(2 - x)$; 2) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$; 3) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$; 4) $y = x^3 + \frac{16}{3x}$;

5) $y = \frac{x^2 + x + 4}{x^2 + 4}$; 6) $y = \frac{x + 1{,}4}{(x^2 - 1)(x - 1)}$.

Степенные, показательные и логарифмические функции

Области определения степенных, показательных и логарифмических функций

7.23. Найдите область определения функции.

А

1) $y = \sqrt{x + 2}$; 2) $y = \sqrt{3 - 2x}$; 3) $y = -2x^{\frac{2}{3}}$; 4) $y = 3(x - 1)^{-\frac{1}{4}}$;

5) $y = \sqrt{2^x - 8}$; 6) $y = \frac{2}{3^x - 9}$; 7) $y = \log_2(x + 1)$; 8) $y = \log_2(4 - x^2)$;

9) $y = \log_2(x + 3) + \log_2(2 - x)$; 10) $y = \log_2(5^x - 25)$.

Б

1) $y = \sqrt{x^2 + x + 2}$; 2) $y = \sqrt{x + 5} - \sqrt{x - 3}$; 3) $y = \frac{25}{3 - \sqrt[4]{x}}$;

4) $y = (2 - x)^{-\frac{1}{3}}$; 5) $y = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$; 6) $y = \frac{1}{8^x - 2^{x+1}}$; 7) $y = \log_2(2 - 2x)$;

8) $y = \log_2(x^2 + x - 6)$; 9) $y = \log_2\frac{x^2 - 3x}{2 - x}$; 10) $y = \log_2(2^{x+2} - 4^x)$.

В

1) $y = \sqrt{\frac{x}{x + 1}}$; 2) $y = \sqrt[4]{8 - x^3}$; 3) $y = \sqrt{2^{-x} - 16}$;

4) $y = (x - 1)^{\frac{1}{3}} + (2 - x)^{\frac{2}{3}}$; 5) $y = \sqrt{x - \sqrt{x}}$; 6) $y = \sqrt{1 - 2^{x+1}}$;

7) $y = \log_2(3 - |x|)$; 8) $y = \log_2(2x - 1) \cdot \log_2(1 - x)$;

9) $y = \log_2(3 - \log_2 x)$; 10) $y = \log_2(3 - x - 2^x)$.

Монотонность показательной функции

7.24. Определите характер монотонности показательной функции, заданной на всей числовой оси.

А

1) $y = 5^{x-3}$; 2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$; 3) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$; 4) $y = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$; 5) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$.

Б

1) $y = 3^{-x}$; 2) $y = -2\cdot 5^{-x}$; 3) $y = 4^{2-x}$; 4) $y = \left(\frac{2}{5}\right)^{1-x}$; 5) $y = -3\cdot 10^{1-x}$.

В

1) $y = 2^{x} + 3^{x+1}$; 2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$; 3) $y = 3^{x} + 3^{x+1} + 3^{x+2}$;

4) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} + 2^{x}$; 5) $y = 3x + 2^{x}$.

☐ Экстремумы

7.25. Исследуйте на экстремум функцию.

А

1) $y = 9 - x^2$; 2) $y = (2x-1)^2$; 3) $y = (1-x)^2 + 3$; 4) $y = 5 - 3x - x^2$;

5) $y = 3 - \frac{3}{x}$; 6) $y = x^4 - x^2$; 7) $y = (2x-1)^2 - 5(2x-1)$.

Б

1) $y = x^2 - 2|x-1|$; 2) $y = |2x-1| + |x+1|$; 3) $y = \frac{|x|}{x-1}$; 4) $y = \left|\frac{x}{x+5}\right|$;

5) $y = \sqrt{x^2 - 8x + 16}$; 6) $y = x\sqrt{x} + \sqrt{x}$.

В

1) $y = \sqrt{1-x^2}$; 2) $y = \frac{1}{x^2 - 4x}$; 3) $y = \ln\sqrt{9-x^2}$; 4) $y = \ln(5x^2 + 4x + 1)$;

5) $y = \frac{-2}{\lg(5-4x-x^2)}$; 6) $y = \frac{1}{\log_{0,5}(16x - x^2)}$.

☐ Наибольшее и наименьшее значения

7.26. Найдите наибольшее и наименьшее значения показательной функции, заданной на указанном промежутке.

А

1) $y = 10^{x}$, $[1; 2]$; 2) $y = 2^{-x}$, $[-1; 0]$; 3) $y = 3^{x-1}$, $[0; 1]$;

4) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$, $[-2; 0]$; 5) $y=4^{x-2}$, $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Б

1) $y=3\cdot 3^{1-x}$, $[-2; 2]$; 2) $y=-2\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$, $[-2; 1]$; 3) $y=\frac{1}{3}\cdot 2^{-x}$, $[-3; -2]$;

4) $y=-7\cdot 10^{-x}$, $[-1; 0]$; 5) $y=2^x+2^{x+1}$, $[2; 3]$.

В

1) $y=3^x+3^{x-2}$, $[2; 3]$; 2) $y=-3\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x}$, $[-1; 3]$;

3) $y=x+2^x$, $[-1; 1]$; 4) $y=2^x+2^{-x}$, $[-2; 2]$; 5) $y=2^x\cdot 3^{-x}$, $[1; 2]$.

☐ Область значений

7.27. Найдите область значений функции.

А

1) $y=\sqrt{x+1}$; 2) $y=x^{\frac{2}{3}}$; 3) $y=-3^{x+1}$; 4) $y=2\lg(x-1)$; 5) $y=2^{\sqrt{x}}$.

Б

1) $y=2\sqrt{2-x}-1$; 2) $y=-(x-1)^{\frac{3}{2}}+1$; 3) $y=2^x-2^{x+2}$;

4) $y=\lg(x^2+1)$; 5) $y=2^x+2^{-x}$.

В

1) $y=\sqrt{x}-\sqrt{2-x}$; 2) $y=\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}$; 3) $y=2^{x^2+2x}$;

4) $y=\log_2 x+\log_2(x-2)$; 5) $y=-x+\lg x$.

☐ Построение графиков стандартных функций

7.28. Постройте график функции.

А

1) $y=2\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt{4-x}$; 3) $y=-x^4+2$; 4) $y=\frac{1}{(x+2)^2}$; 5) $y=2^{-x}$;

6) $y=3^{x+1}$; 7) $y=\log_2(x-2)$; 8) $y=-\lg 10x$.

Б

1) $y = 2 - \sqrt{x}$; 2) $y = \sqrt{1-2x} - 1$; 3) $y = (x-1)^{\frac{3}{4}}$; 4) $y = x^{-\frac{2}{3}}$;

5) $y = 2^x + 2^{x+1}$; 6) $y = -3^{1-x}$; 7) $y = \log_2(-4x)$; 8) $y = \lg\dfrac{100}{x}$.

В

1) $y = \sqrt{4-x^2}$; 2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$; 3) $y = |x|^{\frac{1}{3}}$; 4) $y = (x-1)^{-\frac{4}{3}}$; 5) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-2}$;

6) $y = \dfrac{1}{\lg(x^2+10)}$; 7) $y = \lg\dfrac{x^2}{10}$; 8) $y = \log_2(4^x - 12)$.

■ Тригонометрические функции

□ Свойства

7.29. Для данной функции найдите:

а) область определения;
б) наименьший положительный период (если он существует);
в) наибольшее и наименьшее значения.

А

1) $y = \sin x + 1$; 2) $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; 3) $y = \dfrac{1}{\cos x - 2}$; 4) $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$;

5) $y = \sin\sqrt{x}$; 6) $y = \operatorname{tg} 3x$; 7) $y = 1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; 8) $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$;

9) $y = \dfrac{3}{1-\sin^2 x}$; 10) $y = \dfrac{2}{2\sin x + 3}$.

Б

1) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} 2x$; 2) $y = \sqrt{3\sin x}$; 3) $y = \operatorname{tg}\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$;

4) $y = \dfrac{2}{\sin x - \cos x}$; 5) $y = \dfrac{1}{\sin x + 2\cos x}$; 6) $y = \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$;

7) $y = \dfrac{3}{\sin x + \sin 2x}$; 8) $y = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{8}\right)$; 9) $y = \sqrt{2\cos^2\dfrac{x}{2} - 1}$;

10) $y = \dfrac{\cos 2x}{6\sin^2 x}$.

В

1) $y=\sqrt{\sin x\cos x}$; 2) $y=\ln \operatorname{tg} x$; 3) $y=\sqrt{2\sin x-1}$;
4) $y=\sqrt{\sin x+\cos x}$; 5) $y=\sqrt{\lg\cos x}$; 6) $y=\dfrac{2}{1-\operatorname{tg}^2 2x}$;
7) $y=\sin^2 \operatorname{tg} x+\cos^2 \operatorname{tg} x$; 8) $y=\arcsin(\operatorname{tg} x)$; 9) $y=\sqrt{\arccos x-\dfrac{\pi}{2}}$;
10) $y=\ln(\arcsin x)$.

□ Обратные функции

А

7.30. Для функции $y=\sin x$ выберите промежуток, на котором функция имеет обратную. Укажите монотонность обратной функции.

1) $[0;\pi]$; 2) $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$; 3) $[-2\pi;-\pi]$; 4) $[-\pi;\pi]$; 5) $[-4{,}5\pi;-3\pi]$;
6) $\left[\dfrac{21\pi}{2};\dfrac{23\pi}{2}\right]$; 7) $[3;5]$; 8) $[12;13]$.

Б

7.31. Вычислите значение функции.

1) $\arccos\left(\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$; 2) $\arccos(\sin 270°)$; 3) $\arcsin\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}\right)$;
4) $\arcsin(\cos 0)$; 5) $\arcsin\left(\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$; 6) $\arccos\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}\right)$;
7) $\sin\left(\arccos\dfrac{1}{3}\right)$; 8) $\cos\left(\arcsin\dfrac{4}{5}\right)$; 9) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\dfrac{9}{15}\right)$;
10) $\operatorname{tg}(\arccos(-0{,}6))$; 11) $\arcsin(\sin 3)$; 12) $\arcsin(\sin 5)$;
13) $\arcsin(\cos 4)$; 14) $\arccos(\sin 8)$; 15) $\arcsin(\sin 15)$.

В

7.32. Для данной функции составьте формулу обратной функции на указанном промежутке:

1) $y=\sin x$ на $\left[\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{5\pi}{2}\right]$; 2) $y=\sin 2x$ на $\left[-\dfrac{3\pi}{4};-\dfrac{\pi}{4}\right]$;
3) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ на $\left[;\dfrac{7\pi}{3};\dfrac{17\pi}{6}\right]$ 4) $y=\cos x$ на $[\pi;2\pi]$;
5) $y=\cos x$ на $[-4\pi;-3\pi]$; 6) $y=2\cos x$ на $[9\pi;10\pi]$.

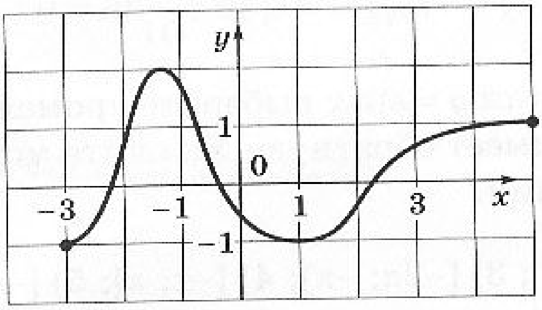
Матричные тесты

■ Чтение графиков ■ График квадратичной функции ■ Графики показательной и логарифмической функций ■ Преобразование графиков

■ Чтение графиков

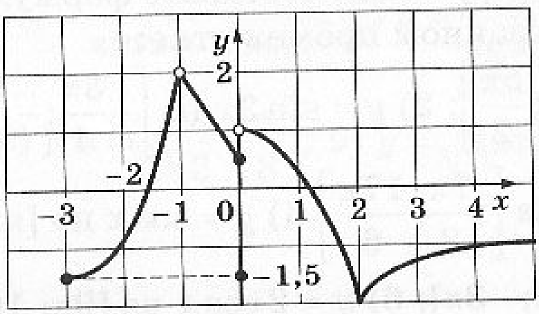
7.33. Отметьте промежутки, на которых функция $f(x)$, заданная графиком, обладает указанными свойствами.

А



Свойство функции	Промежуток				
	[−3; −2]	[−1; 1]	(0; 1]	[−0,1; 3]	[2,5; 3]
Положительная и возрастает					
Отрицательная и убывает					
Выполняется неравенство $f(x) \le 1$					
Принимает наибольшее значение на конце промежутка					
Уравнение $\lvert f(x)\rvert = 1$ имеет хотя бы один корень					

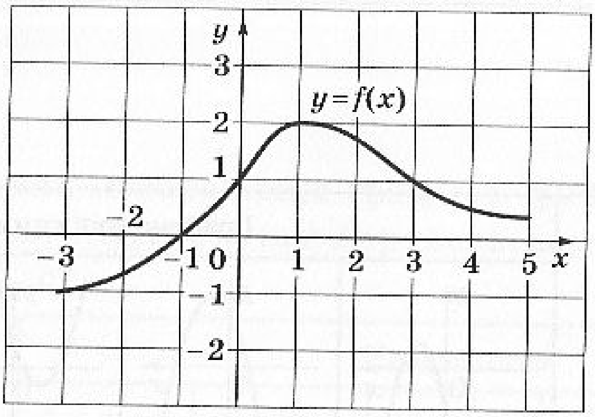
Б



Свойство функции	Промежуток				
	$[-2; -1]$	$[-2; 0]$	$[0; 1]$	$[1; 2]$	$[2; 3]$
Отрицательная или убывает					
Отрицательная и убывает					
Выполняется неравенство $\lvert f(x)\rvert < 1{,}5$					
Принимает наименьшее значение на конце промежутка					
Уравнение $f^2(x) = 1$ имеет ровно один корень					

B

7.34. Дан график функции $y = f(x)$. Укажите, на каких интервалах для функции $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$ выполняются указанные в таблице свойства.

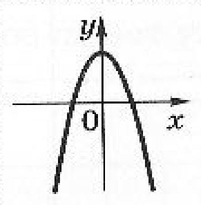
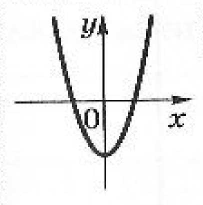
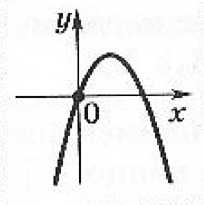
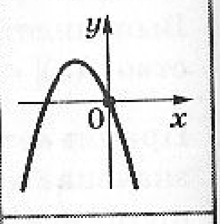


Интервал	Свойство функции				
	g не определена	$g > 0$, $g\downarrow$	$g > 0$, $g\uparrow$	$g < 0$, $g\uparrow$	$g < 0$, $g\downarrow$
$(-3; -1)$					
$(-1; 0)$					
$(0; 1)$					
$(1; 3)$					
$(3; 5)$					

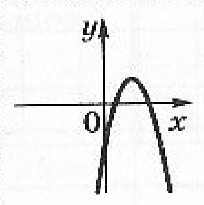
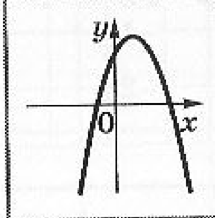
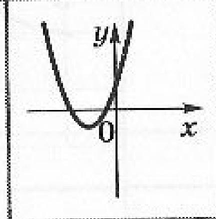
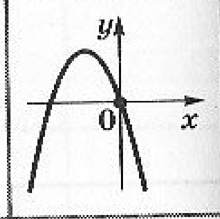
■ График квадратичной функции

7.35. Для каждой из заданных функций укажите ее график.

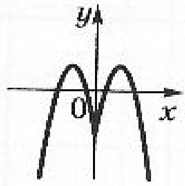
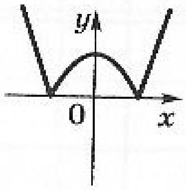
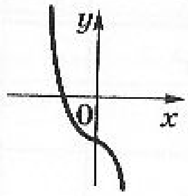
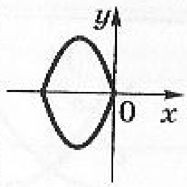
А

Функция	График функции			
				
$y = x(3 - x)$				
$y = -x(1 + x)$				
$y = 3 - 0{,}5x^2$				
$y = x^2 - 2$				

Б

Функция	График функции			
				
$y = (5 - x)(x + 2)$				
$y = 1 - (2x - 3)^2$				
$y = (2 + x)(x + 1)$				
$y = 9 - (x + 3)^2$				

В

Функция	График функции			
				
$y = \|(5 - x)(x + 2)\|$				
$y = 1 - (2\|x\| - 3)^2$				
$y = -2 - x\|x\|$				
$\|y\| = 9 - (x + 3)^2$				

Графики показательной и логарифмической функций

А

7.36. На рисунках изображены графики функций a^x, b^x, c^x, $\log_a x$, $\log_b x$, $\log_c x$. Каким неравенствам удовлетворяют числа a, b, c?

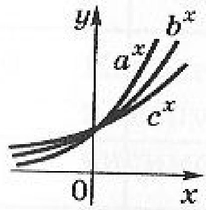
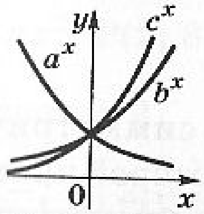
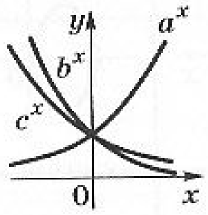
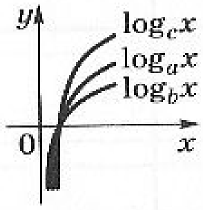
График функции	Неравенство				
	$b < a < c$	$c < a < b$	$b < c < a$	$c < b < a$	$a < b < c$
					
					

График функции	Неравенство				
	$b < a < c$	$c < a < b$	$b < c < a$	$c < b < a$	$a < b < c$
					
					

■ Преобразование графиков

Б

7.37. Какие преобразования графика функции $y = \ln x$ нужно выполнить, чтобы получить графики указанных функций?

Преобразование графика $y = \ln x$	$y = \ln\dfrac{1}{x}$	$y = \ln(-x)$	$y = \ln(x - 3)$	$y = \log_2 x$
Сдвиг по оси Ox				
Сдвиг по оси Oy				
Симметрия относительно оси Ox				
Симметрия относительно оси Oy				
Растяжение по оси Oy				

В

7.38. График каждой из указанных функций симметричен графику функции $y = \ln x$ относительно некоторой прямой или точки. Определите ось или центр этой симметрии.

Ось (центр) симметрии	$y = e^x$	$y = -\ln x$	$y = \ln\dfrac{e^2}{x}$	$y = \ln\left(-\dfrac{1}{x}\right)$	$y = \ln(-x-2)$
Ось Ox					
Прямая $y = x$					
Начало координат					
Прямая $x = 1$					
Прямая $y = 1$					

Самостоятельные работы

■ Простейшие зависимости ■ Понятие функции ■ Чтение графика ■ Линейная функция ■ Преобразования графиков ■ Построение окружностей и гипербол ■ Квадратичная функция ■ График показательной функции ■ График логарифмической функции ■ Монотонность показательной и логарифмической функций

■ Простейшие зависимости

7.39. Построите график зависимости.

А

Вариант 1

$y = -3x$; $y = -x^2$; $yx = 2$.

Вариант 2

$y = -\dfrac{1}{2}$; $y = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + 2$; $\dfrac{y}{x} = 2$.

7.40. Известен вид зависимости и координаты точки P, через которую проходит ее график. Напишите уравнение зависимости.

Вариант 1

$y = ax^2$; $P(2; 8)$.

Вариант 2

$y = \dfrac{c}{x}$; $P\left(2; \dfrac{1}{3}\right)$.

7.41. Известно, что зависимость $y = f(x)$ имеет вид $y = kx$, либо $y = \frac{c}{x}$, либо $y = ax^2$. Определите вид зависимости, если $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$.

Вариант 1

$x_1 = \frac{1}{2}$; $y_1 = 2$;

$x_2 = 1$; $y_2 = 4$.

Вариант 2

$x_1 = \frac{1}{2}$; $y_1 = -\frac{1}{2}$;

$x_2 = 1$; $y_2 = -2$.

7.42. Укажите характер зависимости между переменными в формуле, считая значения остальных переменных фиксированными.

Вариант 1

$x(t)$; $v = \frac{kt^2}{x}$.

Вариант 2

$m(v)$; $\frac{mv^2}{2} + mgh = E$.

Понятие функции

А

7.43. 1) Вычислите значение функции $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ в точках $x_1 = 2$, $x_2 = 2t$.

7.44. Найдите неизвестные координаты точек $P_1(9;\ y_1)$; $P_2(x_1;\ 3)$, если эти точки принадлежат графику функции

$y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$.

7.45. Найдите область определения функции $y = \frac{x}{\sqrt{x} - 1}$.

7.46. Постройте график функции $y = \begin{cases} 2x - 3, x < 1, \\ x^2 - 2, x \geq 1. \end{cases}$

Б

7.47. Найдите координаты точек $P_1(a;\ b)$ и $P_2(2a;\ 3b)$, если известно, что эти точки лежат на прямой $y = 2x - 3$.

7.48. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\sqrt{x} - 3}$.

7.49. Постройте график функции $y = \begin{cases} x - 1, x < -1, \\ 2, x = -1, \\ x^2, x > -1. \end{cases}$

■ Чтение графика

7.50. Дан график функции f. Определите по графику:

1) область определения функции;

2) множество значений;

3) промежутки монотонности;

4) точки экстремума;

5) какие значения функция принимает ровно один раз.

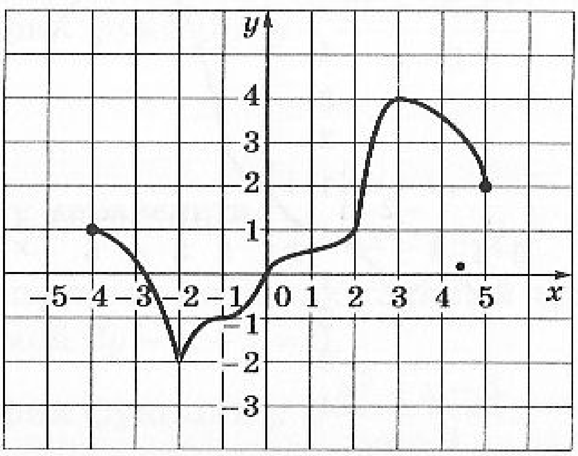
Решите уравнение $f(x) = a$.

Решите неравенство $f(x) \leq b$.

А

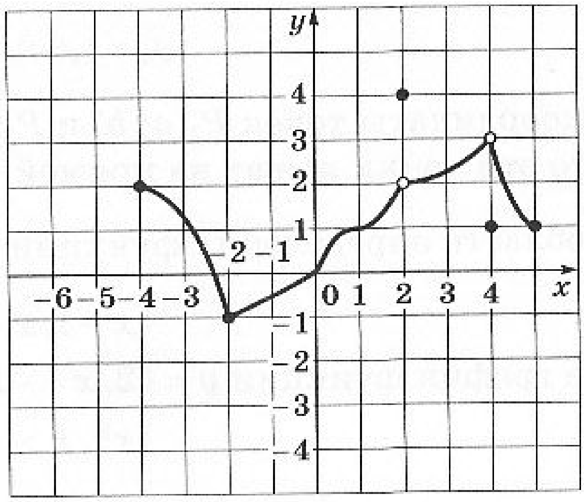
Вариант 1

$a = 1;\ b = 3.$



Вариант 2

$a = 3;\ b = 1.$



Б

7.51. Дан график функции f. Определите по графику:

1) область определения функции;

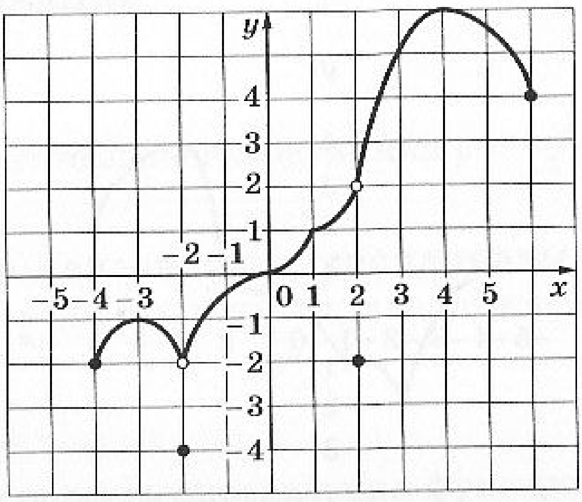
2) множество значений;

3) промежутки монотонности;

4) при каких значениях a уравнение $f(x) = a$ имеет ровно два корня;

5) при каких значениях t неравенство $f(x) < t$ выполняется при всех x из отрезка $[0;\ 1]$;

6) верно ли, что неравенство $f(x) \le x$ влечет неравенство $f(x) \le 2$.



■ Линейная функция

7.52.

А

Вариант 1

1. Решите неравенство $x(x + 1) \leq (x + 2)(x - 3)$.

2. Постройте график линейной функции $y = 3x - 5$.

3. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(1; -2)$, $B(-3; 6)$.

4. Найдите множество значений функции $y = 3 - 2x$ на отрезке $[-4; 5]$.

Вариант 2

1. Решите неравенство $(x - 1)(x - 2) \geq x^2 - 5x + 6$.

2. Постройте график линейной функции $y = 2 - 3x$.

3. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1; -4)$, $B(2; 8)$.

4. Найдите множество значений функции $y = -3x + 2$ на отрезке $[-6; 3]$.

Б

Вариант 1

1. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x + 3 > 0, \\ 1 - 2x \geq 2 + x. \end{cases}$

2. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 1)$ параллельно прямой $2x + y + 5 = 0$.

3. Постройте график функции $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$.

Вариант 2

1. Решите систему неравенств $\begin{cases} 1 - 2x > 0, \\ 2 + 3x \geq 1 - x. \end{cases}$

2. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1; 2)$ параллельно прямой $2y - x + 1 = 0$.

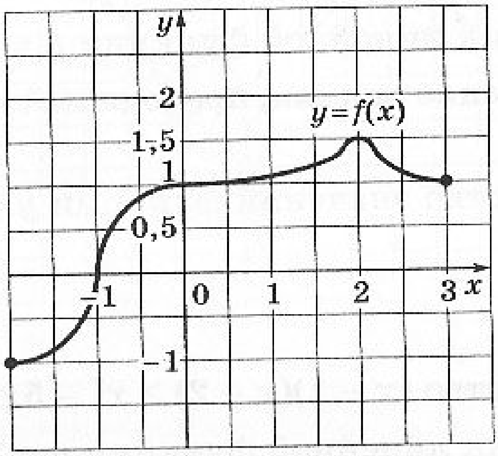
3. Постройте график функции $y = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$.

■ Преобразования графиков

7.53. Дан график функции $y = f(x)$. Постройте графики функций $g(x)$, $h(x)$, $\varphi(x)$.

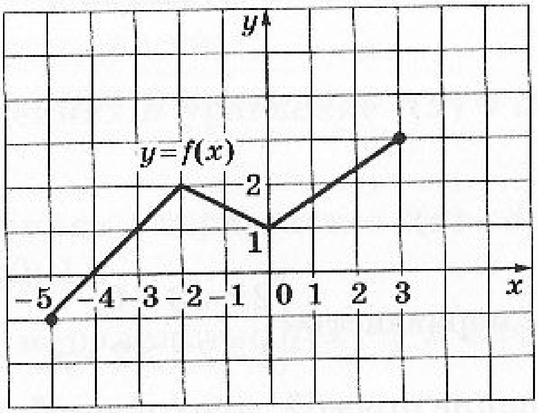
А

$g(x) = f(x + 3)$, $h(x) = f(x) - 3$, $\varphi(x) = f(x - 1) + 2$.



Б

$g(x) = f(x + 5) + 1$, $h(x) = f(-x) + 2$, $\varphi(x) = |f(x - 3)|$.



■ Построение окружностей и гипербол

А

7.54. Дано уравнение окружности. Постройте эту окружность.

Вариант 1

$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0.$

$x^2 + 4x + y^2 + 10y + 25 = 0.$

7.55. Дано уравнение гиперболы. Постройте эту гиперболу.

Вариант 1

$y = \dfrac{x+2}{x-2}.$

Вариант 2

$y = \dfrac{2x+1}{x+6}.$

■ Квадратичная функция

А

7.56. Найдите координаты вершины параболы.

Вариант 1

$y = 2x^2 - 3x.$

Вариант 2

$y = x^2 - 2x + 3.$

7.57. Постройте график функции.

Вариант 1

$y = -2 + 3x - x^2.$

Вариант 2

$y = -x^2 - 3x + 4.$

7.58. Решите неравенство.

Вариант 1

$3x^2 - 2x - 1 < 0.$

Вариант 2

$2x^2 + x - 3 \geq 0.$

7.59. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Вариант 1

$y = 3x^2 - 2x + 1$, $[0; 2]$.

Вариант 2

$y = x^2 + x + 1$, $[-1; 1]$.

Б

7.60. Решите совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} x^2 - 6x + 8 < 0, \\ x^2 - 4x - 5 \geq 0. \end{array}\right.$

7.61. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 - 2x - 3$ на отрезке $[-3; 0]$. Выполните рисунок.

7.62. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Выразите через a, b и c сумму $x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

В

7.63. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы неравенств $\begin{cases} x + y^2 \geq 0, \\ x^2 \leq 1. \end{cases}$

7.64. При каких значениях b и c вершина параболы $y = x^2 + bx + c$ лежит в III четверти?

7.65. При каких значениях c неравенства $x^2 - c < 0$ достаточно для выполнения неравенства $x^2 - x - 2 < 0$?

■ График показательной функции

7.66. Постройте на одном чертеже графики функций: 1) $y = a^x$; 2) $y = \left(\frac{a}{4}\right)^x$; 3) $y = (4a)^x$.

А

Вариант 1

$a = 2$.

Вариант 2

$a = \frac{1}{3}$.

Б

Вариант 1

$a = \frac{3}{4}$.

Вариант 2

$a = \frac{2}{3}$.

7.67. Найдите области значений функций: 1) $y = a^x$; 2) $y = \left(\frac{a}{4}\right)^x$; 3) $y = (4a)^x$ на данном отрезке.

А

Вариант 1

[–2; 3].

Вариант 2

[1; 2].

Б

Вариант 1

[–3; 2].

Вариант 2

[1; 2].

7.68. На каком отрезке надо задать функцию: 1) $y = a^x$; 2) $y = \left(\frac{a}{4}\right)^x$; 3) $y = (4a)^x$, чтобы ее областью значений был данный отрезок?

Б

Вариант 1 $\left(a = \frac{3}{4}\right)$

1) $\left[\frac{27}{64}; \frac{9}{16}\right]$; 2) $\left[\frac{9}{256}; 1\right]$; 3) $\left[\frac{1}{27}; 81\right]$.

Вариант 2 $\left(a = \frac{2}{3}\right)$

1) $\left[\frac{4}{9}; 1\right]$; 2) $\left[\frac{1}{36}; 1\right]$; 3) $\left[\frac{8}{3}; \frac{64}{9}\right]$.

■ График логарифмической функции

7.69. Постройте на одном чертеже графики следующих функций: 1) $y = \log_a x$; 2) $y = \log_{4a} x$; 3) $y = \log_{\frac{a}{4}} x$.

А

Вариант 1

$a = 3$.

Вариант 2

$a = 2$.

Б

Вариант 1

$a = \frac{1}{2}.$

Вариант 2

$a = \frac{1}{3}$

7.70. Найдите области значений функций: 1) $y = \log_a x$, 2) $y = \log_{4a} x$; 3) $y = \log_a x$ на данном отрезке.

А

Вариант 1 $\left(a = \frac{3}{4}\right)$

[3; 27].

Вариант 2 $\left(a = \frac{2}{3}\right)$

[2; 16].

Б

Вариант 1 $\left(a = \frac{3}{4}\right)$

[2; 32].

Вариант 2 $\left(a = \frac{2}{3}\right)$

[3; 81].

7.71. На каком отрезке надо задать функцию: 1) $y = \log_a x$; 2) $y = \log_{4a} x$; 3) $y = \log_{\frac{a}{4}} x$, чтобы ее областью значений был данный отрезок?

Б

Вариант 1 $\left(a = \frac{3}{4}\right)$

1) [–1; 0]; 2) [–2; 2]; 3) [0; 1].

Вариант 2 $\left(a = \frac{2}{3}\right)$

1) [0; 2]; 2) [–1; 1]; 3) [–1; 0].

Монотонность показательной и логарифмической функции

7.72. Сравните числа.

А

Вариант 1

1) 3^{400} и 4^{300}; 2) $\sqrt[6]{24}$ и $\sqrt[3]{5}$; 3) $\lg 2\sqrt{5}$ и $\lg 4{,}5$.

Вариант 2

1) 4^{500} и 5^{400}; 2) $\sqrt[8]{10}$ и $\sqrt[4]{3}$; 3) $\log_4 5$ и $\log_6 5$.

Б

Вариант 1

1) 3^{34} и 2^{51}; 2) 26^{21} и 82^{16}; 3) $2 - 2\lg 2 + \lg 3$ и $2\lg 11$.

Вариант 2

1) 6^{26} и 3^{39}; 2) 24^{13} и 126^{9}; 3) $\frac{1}{2} + \lg 3$ и $\lg 19 - \lg 2$.

7.73. Установите, является ли положительным значение данного выражения.

А

Вариант 1

$\frac{1}{2}\log_{11} 5 + \frac{1}{2}\log_{11} 3 - \log_{11} 4{,}5.$

Вариант 2

$\log_3 3 + \log_3 1{,}4 - \frac{1}{2}\log_3 16.$

Б

Вариант 1

$\lg\left(\sqrt[6]{7000} - 2\sqrt[3]{10}\right).$

Вариант 2

$\lg\left(3 - 2\sqrt[3]{3}\right).$

7.74. Докажите неравенство.

А

Вариант 1

$\log_2 5 + \log_5 2 > 2.$

Вариант 2

$\log_6 7 + \log_7 6 > 2.$

Б

Вариант 1

$\ln \pi + \log_\pi e > 2.$

Вариант 2

$\lg e + \ln 10 > 2.$

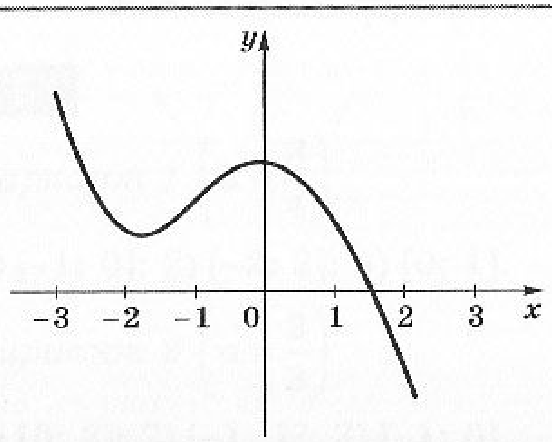
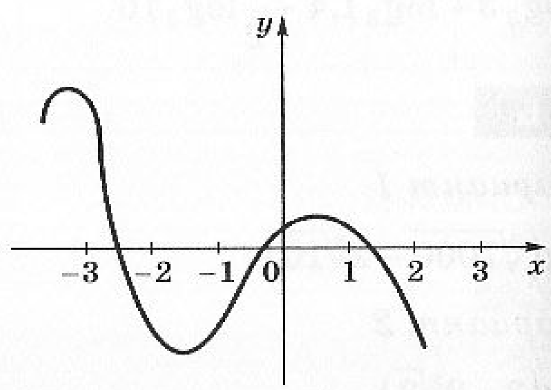
Контрольные тесты с выбором ответа

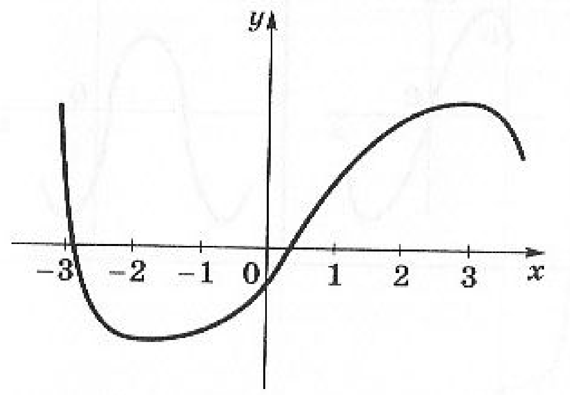
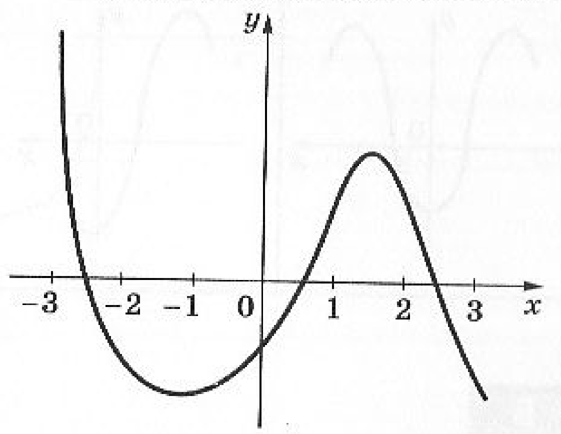
■ Чтение графика ■ Симметрия графика ■ Обратная функция ■ Линейная система ■ Квадратичная функция ■ Рациональные неравенства ■ Графики степенных функций ■ Множество значений показательной функции ■ Область определения логарифмической функции

■ Чтение графика

А

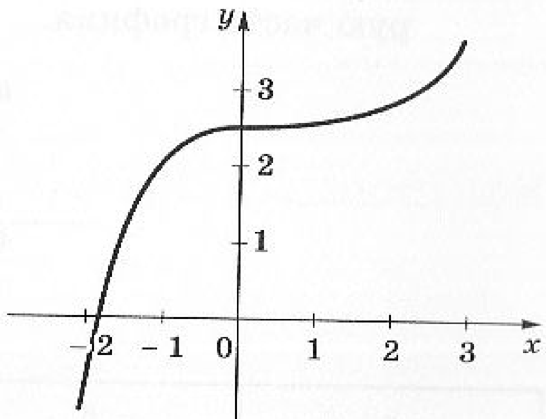
7.75. Укажите график функции, возрастающей на отрезке [–2; 3].

а	б
	

в	г
	

Б

7.76. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$.

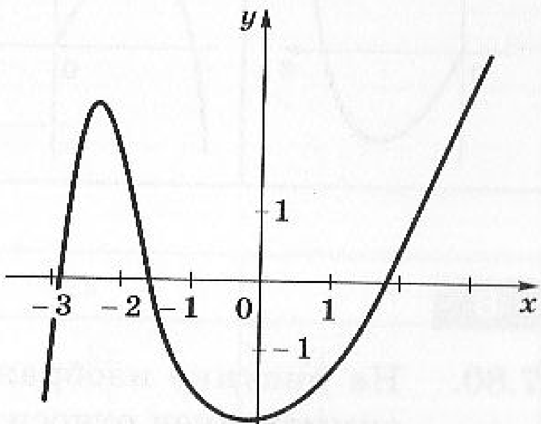


Какому из следующих промежутков принадлежит корень уравнения $f(x) = 3$?

а	б	в	г
$[-1; 1]$	$[-2; 2]$	$[0; 3]$	$[1; 2]$

В

7.77. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$.



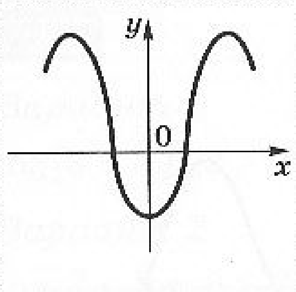
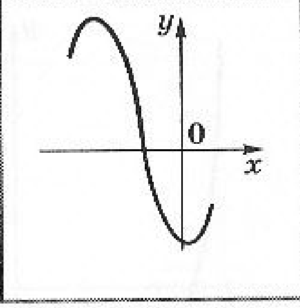
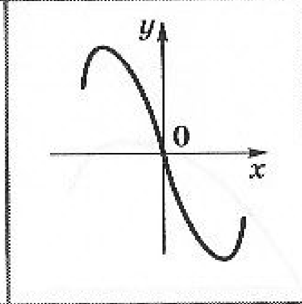
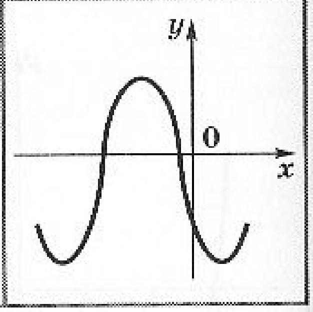
Сколько корней имеет уравнение $|f(x)| = 1$?

а	б	в	г
3	5	6	Корней нет

■ Симметрия графика

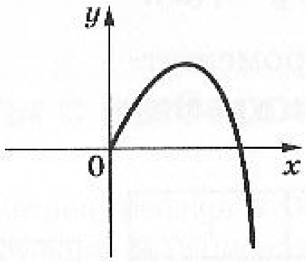
А

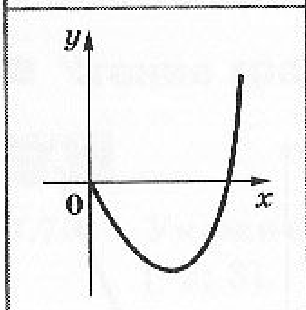
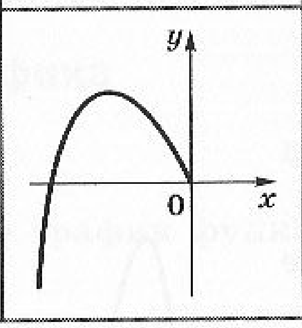
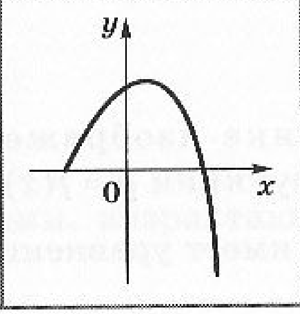
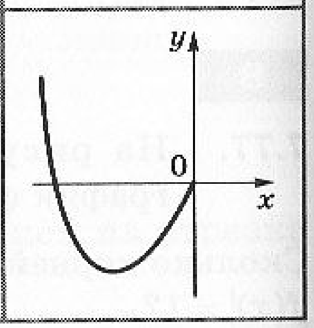
7.78. На каком из следующих рисунков изображен график нечетной функции?

а	б	в	г
			

Б

7.79. На рисунке изображена часть графика нечетной функции $y = f(x)$, соответствующая значениям $x \geq 0$. Выберите вторую часть графика.

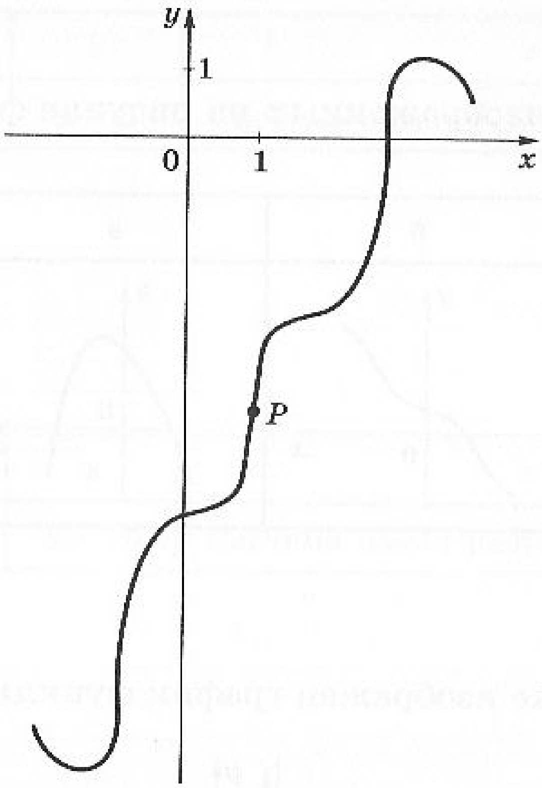


а	б	в	г
			

В

7.80. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Он симметричен относительно точки P. Выберите, какому соотношению удовлетворяет $f(x)$.

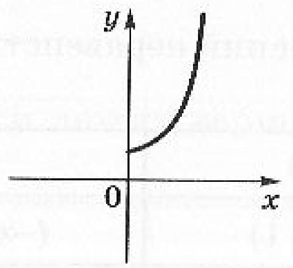
а	б	в	г
$f(x - 4) = -f(x + 5) + 4$	$f(x - 4) = -f(x + 5) - 4$	$f(-x - 4) = -f(x + 5) + 4$	$f(-x - 4) = -f(x + 5) - 4$

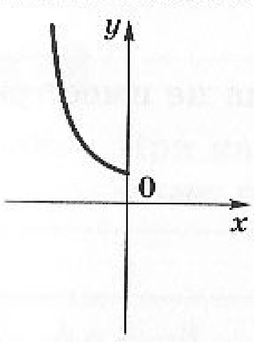
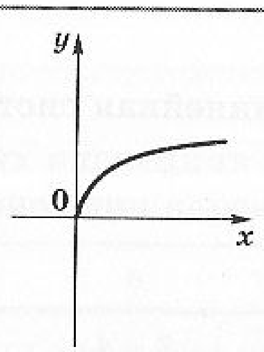
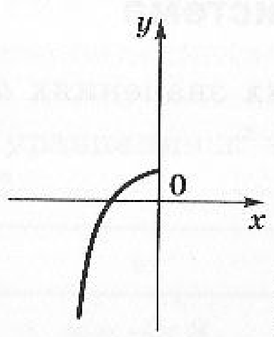
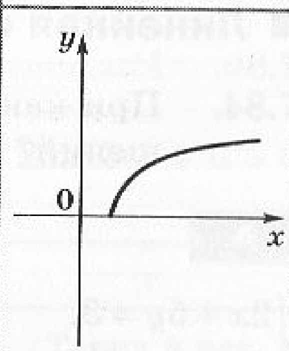


■ Обратная функция

А

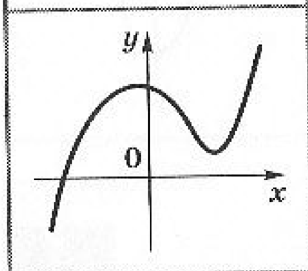
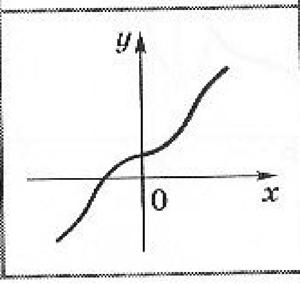
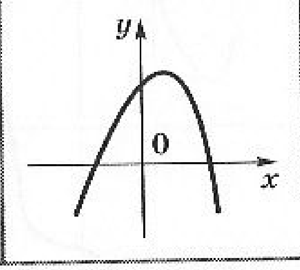
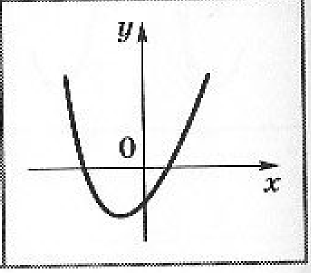
7.81. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Выберите, какая из функций вида $y = h(x)$ является обратной к f.



а	б	в	г
			

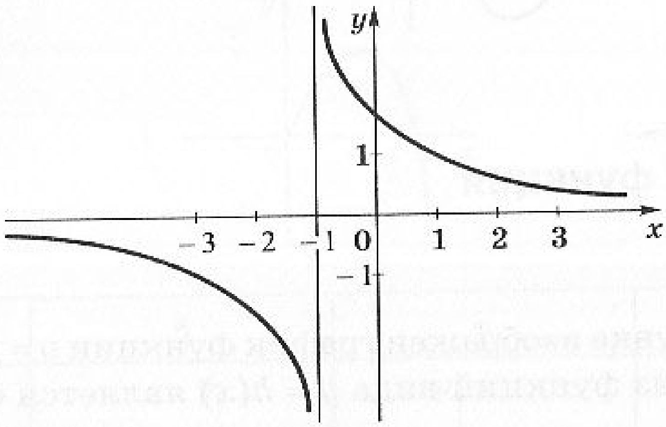
Б

7.82. Какая из изображенных на рисунке функций имеет обратную?

а	б	в	г
			

В

7.83. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$.



Укажите множество решений неравенства $h(x) \le 1$, где h — функция, обратная к f.

а	б	в	г
$[-1; 0]$	$(0; 1]$	$(-\infty; 2]$	$(-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$

■ Линейная система

7.84. При каких значениях a линейная система не имеет решений?

А

$$\begin{cases} 2x + 5y = 3, \\ ax - 15y = 3. \end{cases}$$

а	б	в	г
$a = 6$	$a = -6$	$a = 3$	Система имеет решения при любом a

Б

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ ax + 4y = -2. \end{cases}$$

а	б	в	г
$a = 3$	$a = 6$	$a = -6$	Система имеет решения при любом a

В

$$\begin{cases} 2x + ay = 1, \\ (a-1)x + 3y = -1. \end{cases}$$

а	б	в	г
$a = 3$	$a = -2;\ 3$	$a = -2$	Система имеет решения при любом a

Квадратичная функция

А

7.85. В какой четверти лежит вершина параболы $y = -x^2 + 4x - 5$?

а	б	в	г
В первой	Во второй	В третьей	В четвертой

Б

7.86. При каких значениях k уравнение $x^2 + 2kx + k + 6 = 0$ имеет ровно один корень?

а	б	в	г
$k = 2;\ -3$	$k = 3$	$k = -2;\ 3$	Таких k нет

В

7.87. При каких значениях k прямая $y = kx$ касается параболы $y = x^2 + x + 9$?

а	б	в	г
$k = 5; -7$	$k = -5; 7$	$k = 7$	Таких k нет

Рациональные неравенства

А

7.88. Укажите множество решений неравенства
$$\frac{(3x-2)(x+1)}{x-3} \le 0.$$

а	б	в	г
$(-\infty; -1] \cup [2; 3)$	$(-\infty; -1] \cup \left[\frac{2}{3}; 3\right)$	$\left(-1; \frac{2}{3}\right] \cup (3; +\infty)$	$(-\infty; -1] \cup \left[\frac{2}{3}; 3\right]$

Б

7.89. Укажите множество решений неравенства $\dfrac{2x^2+1}{x-1} \ge 5.$

а	б	в	г
$(-\infty; -1] \cup [2; 3)$	$(-\infty; -1] \cup [0; 3)$	$(1; +\infty)$	$(-\infty; -1]$

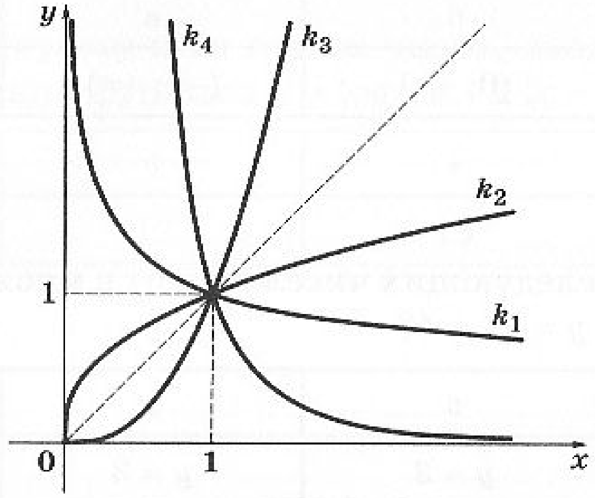
В

7.90. Укажите множество решений неравенства $\dfrac{x+10}{x^2+x-2} \le 3.$

а	б	в	г
$(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$	$(-\infty; 1] \cup [1; 2)$	$\left(-\infty; -\frac{8}{3}\right] \cup (-2; 1) \cup [2; +\infty)$	$(0; 1] \cup \left[-\frac{8}{3}; 2\right]$

Графики степенных функций

7.91. На рисунке изображены графики функций вида $y = x^{k_i}$, $i = 1, 2, 3, 4$.



А

Каким неравенствам удовлетворяют показатели k_1 и k_3?

а	б	в	г
$k_1 < k_3$	$k_1 < k_3 < 1$	$k_1 > k_3 > 1$	$k_3 < k_1 < 0$

Б

Выберите правильное неравенство между показателями k_2, k_3 и k_4.

а	б	в	г
$k_2 < k_3 < k_4$	$k_3 < k_2 < k_4$	$k_4 < k_3 < k_2$	$k_4 < k_2 < k_3$

В

Выберите правильную систему неравенств для показателей k_1 и k_2.

а	б	в	г
$k_1 < 0,\ 0 < k_2 < 1$	$0 < k_1 < 1,\ k_2 < 1$	$k_1 > 1,\ 0 < k_2 < 1$	$0 < k_1 < 1,\ k_2 > 1$

■ Множество значений показательной функции

А

7.92. Найдите множество значений функции $y = 3^x - 10$.

а	б	в	г
$(5; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-10; +\infty)$

Б

7.93. Какое из следующих чисел входит в множество значений функции $y = 2^x + 4$?

а	б	в	г
$y = 5$	$y = 2$	$y = 3$	$y = 4$

В

7.94. Какое из следующих чисел входит в множество значений функции $y = 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$?

а	б	в	г
$y = 1$	$y = 2$	$y = 0$	$y = -1$

■ Область определения логарифмической функции

А

7.95. Найдите область определения функции $y = \log_{0,1}(x - x^2)$.

а	б	в	г
$[0; 1]$	$(0; 1)$	$(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$	$(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$

Б

7.96. Найдите область определения функции
$y = y = \sqrt[6]{\log_{0,1} x - 1}$.

а	б	в	г
$(0;\ 0{,}1]$	$(0;\ 1)$	$(-\infty;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$	$(-\infty;\ 0{,}1]$

В

7.97. Найдите сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции $y = \log_2(x - 2\,|x - 3|)$.

а	б	в	г
4	12	15	20

ГЛАВА 8

Многогранники и круглые тела

Тренажеры

■ Общие свойства многогранников ■ Изображение многогранников ■ Развертки и разрезания ■ Многогранники ■ Круглые тела

■ Общие свойства многогранников

8.1. Подсчитайте число вершин (В), ребер (Р) и граней (Г) следующих многогранников и проверьте справедливость формулы Эйлера: В – Р + Г = 2.

А

1) тетраэдр;
2) куб;
3) параллелепипед;
4) октаэдр;
5) додекаэдр;
6) икосаэдр.

Б

Правильные и полуправильные многогранники:
1) n-угольная правильная пирамида;
2) n-угольная правильная призма;
3) усеченная n-угольная пирамида;

В

8.2. В вершине многогранника сходится n ребер. Эту вершину срезали — провели сечение плоскостью вблизи вершины, пересекающее все ребра. Как изменились числа В, Р, Г? Сохранилось ли соотношение формулы Эйлера?

8.3. Предположим, что у многогранника есть вершина, в которой сходятся три ребра. Проверьте, что это свойство сохранится после срезания этой и только этой вершины.

8.4. Докажите, что существует многогранник, имеющий 300 ребер.

8.5. С каким числом ребер можно построить многогранники, исходя из четырехугольной пирамиды, срезая все вершины с тремя выходящими ребрами при них?

8.6. Может ли существовать многогранник с семью ребрами?

■ Изображение многогранников

А

8.7. Нарисуйте на плоскости тело.

1. Тетраэдр.
2. Куб.
3. Наклонный параллелепипед.
4. Прямая шестиугольная призма.
5. Правильная четырехугольная пирамида.
6. Четырехугольная пирамида, одно ребро которой перпендикулярно плоскости основания.
7. Четырехугольная пирамида, вершина которой проецируется в середину одной из сторон основания.
8. Четырехугольная пирамида, две смежные грани которой перпендикулярны основанию.

Б

8.8. Нарисуйте на плоскости сечения тел.

1. Сечения куба в форме n-угольника ($n = 3, 4, 5, 6$).
2. Сечения куба плоскостью, проведенной через некоторую точку диагонали куба перпендикулярно к ней.
3. Сечения правильной треугольной пирамиды, являющиеся различными по форме треугольниками.

4. Сечения правильной треугольной пирамиды, являющиеся различными по форме четырехугольниками.
5. Различные по форме сечения параллелепипеда.

А

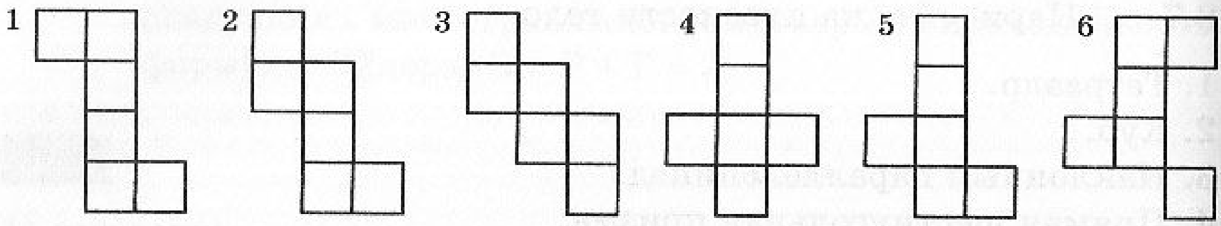
8.9. Нарисуйте на плоскости тела и их сечения.

1. Различные по форме сечения правильной четырехугольной пирамиды.
2. Октаэдр.
3. Многогранник, получающийся соединением центров граней куба.

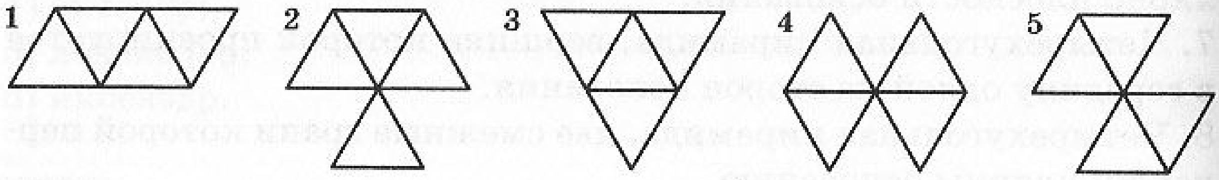
Развертки и разрезания

А

8.10. Какие из приведенных фигур могут быть развертками поверхности куба?



8.11. Какие из приведенных фигур могут быть развертками поверхности тетраэдра?



8.12. Разрежьте куб на три четырехугольные пирамиды.

8.13. Предложите различные способы, как плоскостью разрезать цилиндр на две равные части.

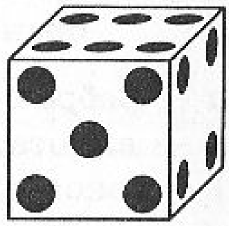
Б

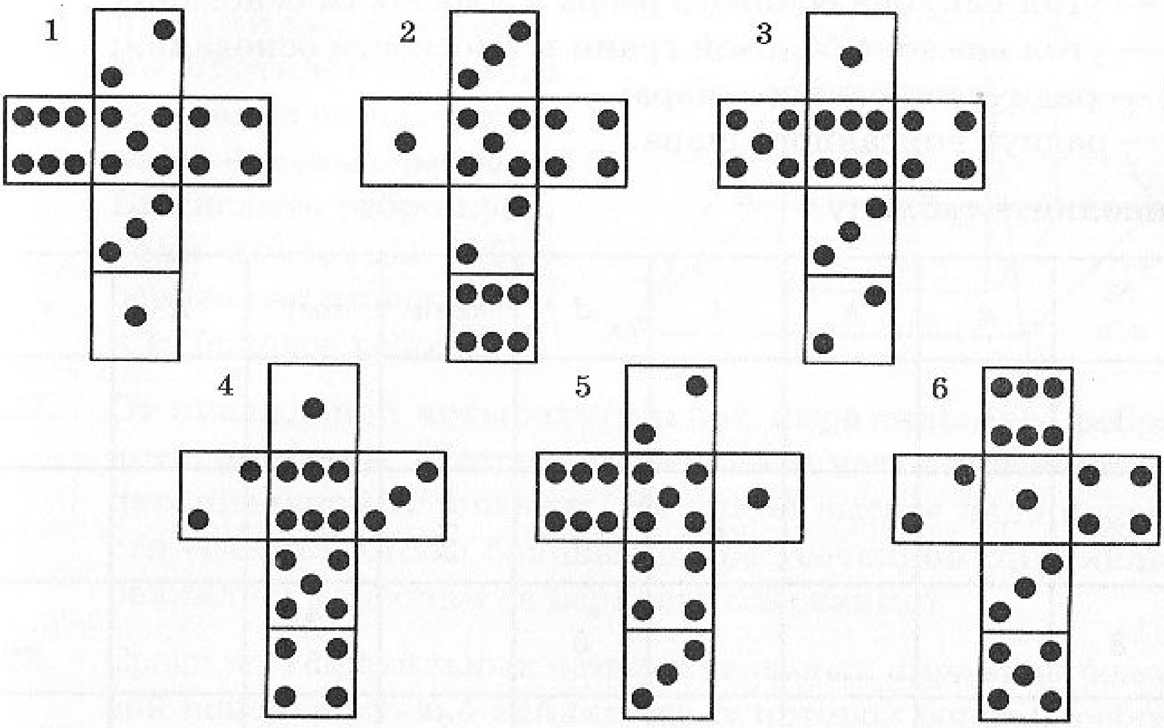
8.14. Две точки A и B находятся по одну сторону от некоторой плоскости. Постройте в этой плоскости точку C так, чтобы сумма расстояний $|AC| + |CB|$ была минимальной.

8.15. Постройте кратчайший замкнутый путь по поверхности куба из одной вершины в противоположную.

8.16. Постройте кратчайший путь по поверхности правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ и пересекающий (хотя бы в вершинах) все ее ребра.

8.17. Из каких разверток поверхности куба, изображенных на рисунке, можно склеить изображенную там же игральный кубик?





В

8.18. На сколько частей можно разрезать тетраэдр двумя плоскостями? Сколько при этом можно получить тетраэдров?

8.19. Сколько достаточно провести плоскостей, чтобы разрезать куб на тетраэдры?

8.20. Разрежьте тетраэдр так, чтобы ни один из получившихся многогранников не был тетраэдром.

8.21. Разрежьте треугольную призму на три тетраэдра.

■ Многогранники

□ Четырехугольная пирамида

А

8.22. Для правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ выбраны следующие обозначения:

a — ребро основания AB;
h — высота;
l — боковое ребро;
d — апофема (высота боковой грани, опущенная из вершины S);
α — угол наклона бокового ребра к плоскости основания;
β — угол наклона боковой грани к плоскости основания;
R — радиус описанного шара;
r — радиус вписанного шара.

Заполните таблицу.

№ п/п	a	h	l	d	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	R	r
1	6	4						
2			6		$\frac{1}{2}$			
3				5		$\frac{4}{5}$		
4					$\frac{3}{5}$		2	
5						$\frac{1}{2}$		1

Б

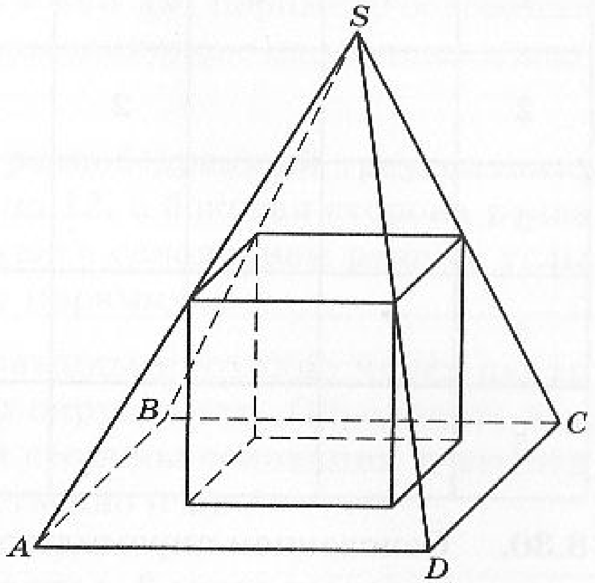
8.23. Вычислите расстояние от вершины, лежащей в основании правильной четырехугольной пирамиды, до противоположного бокового ребра, если все ребра пирамиды равны 1.

8.24. Определите двугранный угол при основании правильной четырехугольной пирамиды, боковая грань и диагональное сечение которой равновелики.

8.25. Основанием пирамиды является ромб, а высота пирамиды равна $2\sqrt{3}$ дм и проходит через центр основания. Найдите сторону основания пирамиды, если расстояния от центра основания пирамиды до боковых ребер равны 2 дм и $\sqrt{3}$ дм.

B

8.26. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб (это означает, что одно его основание лежит на основании пирамиды, а вершины противоположного основания расположены на ее боковых ребрах). Вычислите ребро куба, если известны ребро основания пирамиды a и ее боковое ребро l.



8.27. От правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны 1, отсекают верхнюю часть плоскостью, параллельной основанию. На какой высоте надо провести сечение, чтобы боковые ребра усеченной пирамиды равнялись сторонам ее верхнего основания?

8.28. Среди всех правильных четырехугольных пирамид с боковой поверхностью 4 найдите ту, у которой боковое ребро минимально. В ответе укажите длину стороны основания такой пирамиды.

□ Треугольная пирамида

A

8.29. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ введены следующие обозначения:

a — ребро основания AB;
h — высота;
l — боковое ребро;
d — апофема (высота боковой грани, опущенная из вершины S);
α — угол наклона бокового ребра к плоскости основания;

β — угол наклона боковой грани к плоскости основания;
R — радиус описанного шара;
r — радиус вписанного шара.

Заполните таблицу.

№ п/п	a	h	l	d	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	R	r
1	4	6						
2			2		$\frac{1}{2}$			
3				4		$\frac{3}{5}$		
4					$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1	
5						$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1

8.30. Основанием пирамиды служит треугольник, одна сторона которого равна 3, а угол, лежащий против нее, равен 30°. Определите высоту пирамиды, если каждое ее боковое ребро равно 5.

8.31. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 60°. Вычислите высоту пирамиды.

8.32. В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой l. Боковые ребра одинаково наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите высоту пирамиды.

8.33. В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетами a и b. Боковые ребра равны между собой и равны l. Найдите высоту h пирамиды.

8.34. Вычислите боковое ребро треугольной пирамиды, высота которой проходит через центр окружности, описанной около основания, если:

а) стороны основания пирамиды равны 50, 78 и 112 дм, а высота равна 72 дм;

б) ребра основания равны 4, 4 и 4,8 дм, а высота равна 6 дм.

Б

8.35. Боковые грани треугольной пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, а периметр основания равен 60 см. Два боковых ребра пирамиды равны 15 и 20 см и образуют прямой угол. Определите третье боковое ребро.

8.36. Определите высоту треугольной пирамиды $SABC$, у которой: $AB = BC = SA = SC = 4\sqrt{3}$ дм, периметр основания равен 16 дм и боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания.

8.37. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12, а боковая сторона равна 10. Боковые ребра образуют с основанием равные углы по 45°. Вычислите высоту пирамиды.

8.38. Высота треугольной пирамиды проходит через центр вписанной в ее основание окружности. Определите высоту боковой грани, если стороны основания и высота пирамиды равны соответственно (см):
а) 25, 39, 56 и 24;
б) 25, 29, 36 и 15;
в) 29, 35, 48 и 40.

8.39. В правильной треугольной пирамиде через ребро основания и середину противоположного бокового ребра проведена плоскость, которая оказалась перпендикулярной этому ребру. Вычислите высоту боковой грани, проведенную из вершины пирамиды, (апофему), если сторона основания равна 1.

В

8.40. Все грани тетраэдра — подобные между собой прямоугольные треугольники. Найдите отношение наибольшего и наименьшего ребер этого тетраэдра.

8.41. Определите боковое ребро правильной треугольной пирамиды, высота которой равна $\sqrt{7}$ дм, а высота боковой грани, опущенная на боковое ребро, — $\sqrt{5}$ дм.

8.42. Двугранный угол при боковом ребре правильной треугольной пирамиды равен 120°; расстояние от центра основания пирамиды до бокового ребра равно a. Определите высоту пирамиды.

8.43. Основание пирамиды — треугольник, одна сторона которого равна 8 дм, а разность двух других — 2 дм. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 30°; высота боковой грани больше высоты пирамиды на 1 дм. Определите неизвестные стороны основания пирамиды.

8.44. Длина стороны правильного треугольника, лежащего в основании пирамиды, равна 3. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна основанию, а площади двух других боковых граней равны 5 и 4. На какие по величине отрезки высота пирамиды делит сторону основания?

☐ Пирамиды

А

8.45. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания равна 6, а боковое ребро — 10.

1) Докажите, что $SA \perp BF$; будет ли $SA \perp DE$?

2) Вычислите:

а) высоту пирамиды;

б) угол между SA и плоскостью основания;

в) площадь сечения, проведенного через середину высоты перпендикулярно высоте;

г) угол между ребрами SA и SE;

д) угол между плоскостями ABS и EDC.

8.46. Определите высоту правильной шестиугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а косинус двугранного угла при боковом ребре равен –0,625.

Б

8.47. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 7. Стороны основания 10 и 2. Найдите:

1) высоту боковой грани;

2) длину бокового ребра;

3) угол наклона боковых ребер к основанию;

4) площадь сечения, проходящего через середину высоты параллельно основанию.

В

8.48. В правильной n-угольной пирамиде все ребра равны между собой. При каких значениях n это возможно?

□ Призмы

А

8.49. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углами 45 и 30°. Найдите косинус угла между этими диагоналями.

8.50. Определите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если периметр его основания равен 16 см, полная поверхность равна 168 $см^2$ и объем равен 108 $см^3$.

8.51. Через диагональ AC квадрата $ABCD$, лежащего в основании прямоугольного параллелепипеда, и вершину B_1 другого основания параллелепипеда проведена плоскость так, что в сечении получился треугольник AB_1C с углом при вершине B_1, в два раза бóльшим, чем угол между плоскостью сечения и основанием параллелепипеда. Найдите угол AB_1C.

8.52. Диагональ правильной четырехугольной призмы образует с плоскостью боковой грани угол 30°. Найдите угол между диагональю и плоскостью основания.

8.53. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция с основаниями a и b и высотой h. Найдите острый угол, образованный двумя соседними боковыми гранями.

Б

8.54. В сечении прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием плоскостью получается ромб. Найдите углы ромба, если угол между плоскостью сечения и плоскостью основания равен 30°.

8.55. Стороны основания прямого параллелепипеда относятся как $2:7$, бóльшая из диагоналей основания, равная $10\sqrt{3}$ см, образует с меньшей стороной основания угол 30°. Определите меньшую диагональ параллелепипеда, если его боковая поверхность равна 1 080 $см^2$.

8.56. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник со стороной 4. Прямые AB_1 и CA_1 перпендикулярны. Найдите высоту призмы.

8.57. Каждое ребро наклонной треугольной призмы равно 2, одно из боковых ребер составляет со смежными сторонами основания углы $60°$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

В

8.58. Определите стороны основания прямого параллелепипеда, объем которого равен 3 360 см^3, полная поверхность равна 1 416 см^2, боковая поверхность — 1 080 см^2 и бо́льшая диагональ параллелепипеда — 29 см.

8.59. В сечении прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием плоскостью получается ромб с острым углом $60°$. Под каким углом пересекает плоскость сечения боковые ребра параллелепипеда?

8.60. В параллелепипеде все грани — равные ромбы с острым углом $60°$ и стороной a. Найдите: а) диагонали параллелепипеда; б) его высоту; в) угол наклона бокового ребра к плоскости основания; г) угол между соседними гранями.

8.61. В правильной четырехугольной призме через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, пересекающая это основание под углом α и три боковых ребра призмы. Определите площадь полученного сечения и его острый угол, если сторона основания призмы равна b.

■ Круглые тела

□ Построение

8.62. Нарисуйте на плоскости изображение тела вращения.

А

1. Прямой круговой цилиндр.
2. Прямой круговой конус.
3. Усеченный прямой круговой конус.

Б

1. Фигура, получающаяся вращением треугольника вокруг одной из его сторон. Рассмотрите треугольники разных видов.

2. Фигура, получающаяся вращением кругового сектора вокруг оси, проходящей через центр круга, из которого вырезан сектор.

3. Фигура, получающаяся вращением равнобедренной трапеции вокруг ее оси симметрии.

4. Развертка поверхности усеченного конуса.

B

1. Фигура, получающаяся вращением прямоугольника вокруг оси, параллельной одной из его сторон и не пересекающей прямоугольник.

2. Фигура, получающаяся вращением круга вокруг непересекающей его оси.

3. Точки A и B цилиндра соединили веревкой, опоясывающей цилиндр и имеющей наименьшую возможную длину. Как изобразится эта веревка на развертке поверхности цилиндра?

□ Вычисления

A

8.63. На каком расстоянии от центра шара радиуса 5 надо провести плоскость, чтобы в ее сечении получился круг радиуса 4?

8.64. Точка находится на расстоянии 13 от центра шара. Длина касательной, проведенной к шару из этой точки, равна 12. Вычислите радиус шара и расстояние от точки до шара.

8.65. На плоскости лежат два шара радиусами 1 и 2. Шары касаются. Вычислите:

а) расстояние между точками касания шаров плоскости;

б) расстояние от точки касания шаров до плоскости.

8.66. Диаметр основания конуса равен 6, а его высота равна 4. Вычислите образующую конуса и расстояние от центра основания до образующей конуса.

8.67. Для конуса введены следующие обозначения:

R — радиус основания;
l — образующая;
h — высота;

α — угол наклона образующей к плоскости основания;
β — угол сектора, получающегося при развертке конуса;
r — радиус шара, вписанного в конус;
R_o — радиус шара, описанного около конуса.

Заполните таблицу.

№ п/п	R	l	h	$\cos\alpha$	β	r	R_o
1	6	10					
2		5	3				
3		4		$\frac{3}{4}$			
4		5			$\frac{8}{5}\pi$		
5	$\frac{\sqrt{3}}{3}$					1	
6				$\frac{1}{2}$			1

8.68. В цилиндр можно вписать шар радиуса R. Вычислите радиус шара, описанного около цилиндра.

8.69. Высота конуса равна 8, а образующая — 10. Определите радиус вписанного шара.

8.70. В усеченном конусе радиусы оснований равны 1 и 4, а образующая — 5. Найдите: а) высоту конуса; б) косинус угла наклона образующей к основанию.

8.71. Диаметр основания цилиндра равен 12, высота — 20. Рассмотрим точки, находящиеся на поверхности цилиндра на расстоянии 10 от центра нижнего основания цилиндра. На какой высоте от нижнего основания находятся эти точки? Какую фигуру они образуют?

8.72. Один из двух непересекающихся шаров имеет вчетверо меньший радиус, чем второй. Расстояние между центрами шаров равно 9. Касательная плоскость к обоим шарам пересекла линию центров в точке A. Найдите расстояние от точки A до центра меньшего шара.

Указание. Рассмотрите два случая.

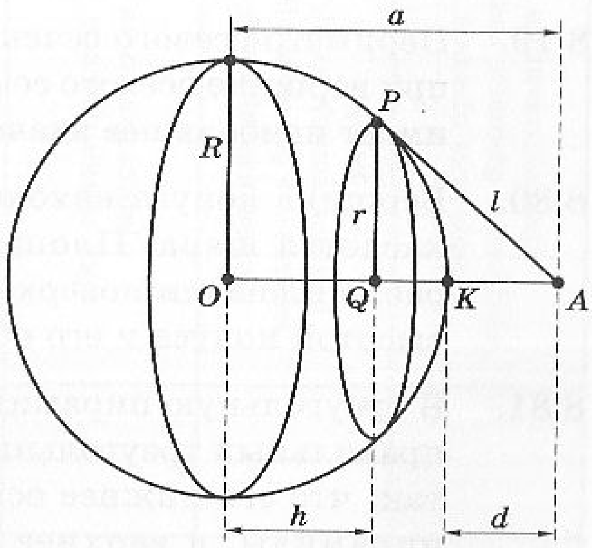
8.73. Два одинаковых шара пересекаются по кругу диаметра 12. Расстояние между их центрами равно 16. Найдите радиус шаров.

8.74. Через точку на поверхности шара проведены диаметр и сечение, образующее с диаметром угол 60°. Найдите радиус шара, если радиус сечения равен 5.

Б

8.75. Точка A находится вне шара на расстоянии 2 от его поверхности. Зная радиус шара $R = 8$, вычислите длину касательной, проведенной к шару из данной точки.

8.76. Пусть точка A находится вне шара с центром O и радиусом R. Из точки A проведена прямая, которая касается шара в точке P (см. рисунок). Обозначим длину отрезка AP через l. Через точку P проведено сечение шара, перпендикулярное OA. В сечении получился круг радиуса r. Расстояние от центра шара до этой плоскости обозначим через h, расстояние от точки A до шара (т. е. длину отрезка AK, где K — точка пересечения с шаром отрезка AO) — через d, а расстояние от точки A до центра шара — через a. Введенные величины R, r, l, h, a и d связаны между собой соотношениями, являющимися следствиями теоремы Пифагора. Зная две из этих величин, можно вычислить четыре остальные. Первые три задачи тренажера являются частными случаями этих вычислений. Найдите все указанные величины по следующим данным:



а) $R = 10$, $r = 8$;

б) $R = 15$, $l = 20$;

в) $h = 9$, $d = 13$;

г) $r = 12$, $a = 25$;

д) R, h;
е) r, a;
ж) R, d.

8.77. Определите ребро куба, вписанного в конус, образующая которого равна l и наклонена к плоскости основания под углом α.

В

8.78. Высота конуса равна 3, радиус основания равен 5. Через вершину конуса проводят сечение, пересекающее основание по хорде, отстоящей от центра основания на расстояние x. Вычислите площадь сечения как функцию от x.

8.79. Периметр осевого сечения конуса равен p. Найдите угол при вершине осевого сечения, для которого объем конуса имеет наибольшее значение.

8.80. Вершина конуса находится в центре шара, а основание касается шара. Площадь полной поверхности конуса равна площади поверхности шара. Найдите угол между высотой конуса и его образующей.

8.81. В треугольную пирамиду, основанием которой является правильный треугольник со стороной a, вписан цилиндр так, что его нижнее основание находится на основании пирамиды, а верхнее касается всех боковых граней. Определите объем цилиндра и объем пирамиды, отсеченной плоскостью, проходящей через верхнее основание цилиндра, если известно, что высота цилиндра равна $\frac{a}{2}$, одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно плоскости основания, а боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α. Определите, при каких значениях задача имеет решение.

8.82. В равносторонний конус (конус, осевое сечение которого — равносторонний треугольник) вписан цилиндр (основание цилиндра находится на основании конуса, а окружность другого основания цилиндра лежит на поверхности конуса). Этот цилиндр имеет наибольший возможный объем. Будет ли он иметь наибольшую возможную площадь поверхности?

Матричные тесты

■ Свойства призмы ■ Сечения ■ Сечения шара плоскостью

■ Свойства призмы

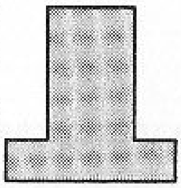
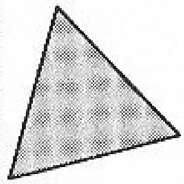
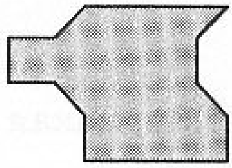
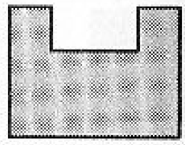
А

8.83. Отметьте, какая призма обладает указанными свойствами.

Призма	Свойства				
	Все диагонали призмы равны между собой	Высота призмы равна боковому ребру	Все грани призмы — прямоугольники	Основание призмы — квадрат, а боковые грани, равные между собой, — ромбы	Основание призмы — квадрат, а боковые грани — прямоугольники
Прямой параллелепипед					
Прямоугольный параллелепипед					
Прямая призма					
Правильная призма					
Наклонная призма					
Наклонный параллелепипед					

Б

8.84. **Отметьте, развертками каких многогранников являются данные многоугольники.**

Многогранник	Многоугольник			
				
Пирамида				
Прямая призма				
Параллелепипед				
Наклонная призма				
Такого многогранника не существует				

В

8.85. **Какими свойствами симметрии обладают указанные фигуры?**

Свойство симметрии	Многогранник				
	Куб	Правильный тетраэдр	Правильная четырехугольная пирамида	Наклонный параллелепипед	Треугольная призма
Центр симметрии					
Ось симметрии					
Плоскость симметрии					
Поворот вокруг оси					

■ Сечения

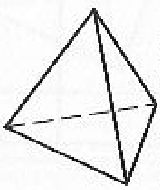
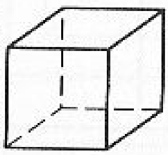
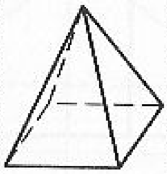
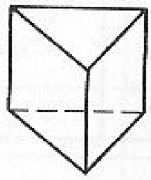
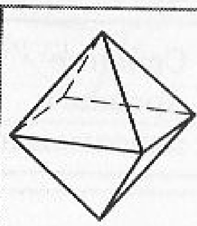
А

8.86. Какие кривые образуются при пересечении данной поверхности плоскостью?

Поверхность	Плоскость				
	Окружность	Гипербола	Отрезки прямых	Эллипс	Многоугольник
Сфера					
Круговой цилиндр					
Куб					
Тетраэдр					
Конус					

Б

8.87. Какие многоугольники могут получиться в сечении данного многогранника плоскостью?

Плоскость	Многогранник				
					
Треугольник					
Квадрат					
Параллелограмм с острым углом					
Пятиугольник					
Шестиугольник					

В

8.88. Отметьте, какая плоская фигура может быть сечением куба.

Плоская фигура	Плоскость сечения проходит через			
	две диагонали куба	три точки, лежащие на трех смежных ребрах куба	три точки, лежащие на трех боковых ребрах куба на разном расстоянии от основания	две точки, лежащие на смежных сторонах нижнего основания, и точку, лежащую на стороне верхнего основания
Параллелограмм				
Прямоугольник				
Треугольник				
Трапеция				
Пятиугольник				
Шестиугольник				
Сечение провести невозможно				

Б

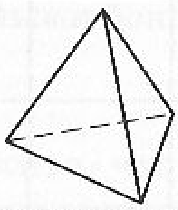
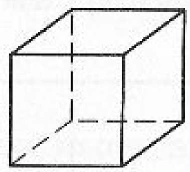
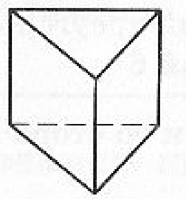
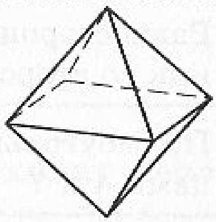
8.89. Какую тень (при освещении параллельным пучком света) может отбросить указанный многогранник?

Плоская фигура	Многогранник				
	Куб	Треугольная пирамида	Октаэдр	Четырехугольная правильная призма	Треугольная призма
Треугольник					
Четырехугольник					

Плоская фигура	Многогранник				
	Куб	Треугольная пирамида	Октаэдр	Четырехугольная правильная призма	Треугольная призма
Пятиугольник					
Шестиугольник					
Невыпуклая фигура					
Многоугольник с числом сторон, большим четырех					

В

8.90. Грани многогранника неограниченно продолжили. На сколько частей получившиеся плоскости разбили пространство?

Количество частй	Многогранник			
				
14				
15				
19				
21				
27				

■ Сечения шара плоскостью

А

8.91. Для каждого шара радиуса R укажите радиус сечения r шара плоскостью, если она проведена на расстоянии 10 см от центра.

Радиус шара R	Радиус сечения r				
	8	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{7}$	24	$4\sqrt{6}$
26					
$6\sqrt{3}$					
$2\sqrt{41}$					
14					
$8\sqrt{2}$					

Б

8.92. Отметьте, в какую из сфер радиуса R можно вписать многоугольник.

Многоугольник	Радиус сферы R				
	10	5	12	4	8
Прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8					
Равносторонний треугольник со стороной 6					
Прямоугольник со сторонами 4 и 7					
Квадрат со стороной 8					
Правильный шестиугольник со стороной 5					

Самостоятельные работы

■ Призмы ■ Пирамиды ■ Круглые тела

■ Призмы

А

8.93. Диагонали боковых граней прямой треугольной призмы равны $9, 10\sqrt{2}$ и 15. Основание призмы — прямоугольный треугольник. Вычислите стороны основания призмы.

Б

8.94. Каждое ребро наклонной треугольной призмы равно 2, одно из боковых ребер составляет со смежными сторонами основания углы 60°. Найдите площадь поверхности призмы.

В

8.95. Длина диагонали правильной четырехугольной призмы равна l, диагональ образует с плоскостью основания угол α. Найдите объем призмы.

Пирамиды

А

8.96. Определите высоту правильной шестиугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а косинус двугранного угла при боковом ребре равен (–0,625).

Б

8.97. В правильной четырехугольной пирамиде боковые грани образуют с основанием угол 45°. Найдите угол между смежными боковыми гранями пирамиды.

В

8.98. Докажите, что если высота пирамиды проходит через центр описанной около основания окружности, то боковые ребра равны между собой и одинаково наклонены к плоскости основания.

Круглые тела

А

8.99. В шар радиуса R вписан конус, у которого образующая составляет с плоскостью основания угол φ. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

Б

8.100. Из множества цилиндров, периметр осевого сечения которых равен $2p$, найдите объем цилиндра, имеющего наибольшую боковую поверхность.

В

8.101. Через вершину прямого кругового конуса проведено сечение максимальной площади. Известно, что площадь этого сечения в два раза больше площади осевого сечения. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

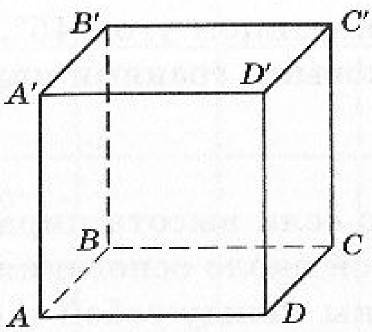
Контрольные тесты с выбором ответа

А

8.102. Какая плоская фигура не может быть сечением прямого кругового конуса?

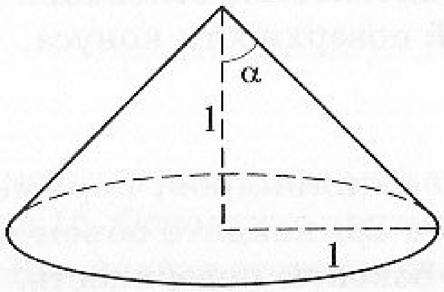
а	б	в	г
Окружность	Прямоугольник	Парабола	Одна точка

8.103. Какое из следующих утверждений о кубе $ABCDA'B'C'D'$ неверное?



а	б	в	г
$A'C \perp DB'$	$AC \perp D'B$	$AB' \perp BC$	$B'C \perp DC$

8.104. Высота конуса равна 1. Радиус основания тоже равен 1. Каков угол при вершине осевого сечения?



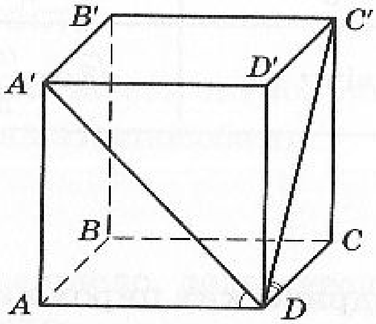
а	б	в	г
30°	45°	60°	90°

8.105. Правильный тетраэдр, все ребра которого равны 5, и правильная четырехугольная пирамида, в основании которой лежит квадрат со сторонами, равными 5, склеены между собой треугольными гранями. Сколько граней у полученного многогранника?

а	б	в	г
9	7	6	5

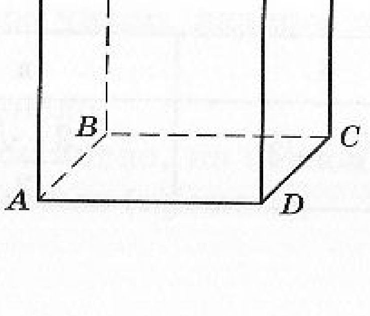
Б

8.106. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ $\angle ADA' = 45°$ и $\angle C'DC = 60°$. Чему равен $\cos\angle A'DC'$?



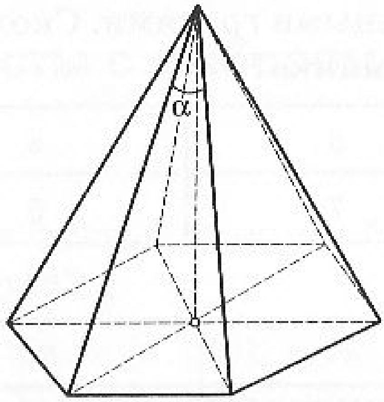
а	б	в	г
$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{6}$	$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$	$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

8.107. Точка F — середина ребра $D'C'$ куба. Какая из следующих ломаных, соединяющих вершины A' и C куба, короче остальных?



а	б	в	г
$CD'A'$	$CC'A'$	CFA'	CDA'

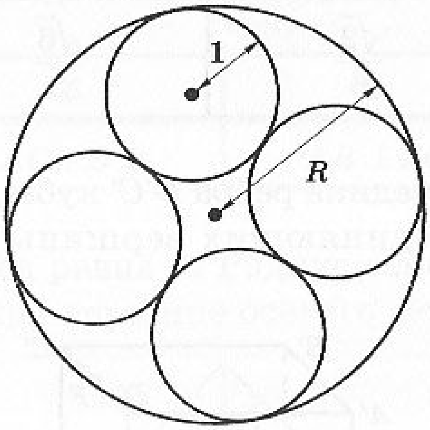
8.108. Основанием правильной пирамиды является шестиугольник со стороной 1, а высота пирамиды равна 2. Какое условие справедливо для угла α?



а	б	в	г
$2\sqrt{5}\sin\frac{\alpha}{2}=1$	$\sqrt{5}\sin\alpha=1$	$\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2}=1$	$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2}$

В

8.109. Четыре цилиндрических пирожка положили рядом друг с другом на круглую сковородку. Радиус основания пирожка равен 1. Чему равен радиус R сковородки?



а	б	в	г
$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}+\sqrt{3}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	$1+\sqrt{2}$

ГЛАВА 9

Начала математического анализа

Тренажеры

■ Последовательность ■ Суммирование последовательностей ■ Арифметическая прогрессия ■ Геометрическая прогрессия ■ Предел функции ■ Производная функции ■ Применение производной функции ■ Исследование функции с помощью производной

■ Последовательность

9.1. Запишите первые шесть членов последовательности, заданной различными способами.

А

1) a_n — n-е натуральное число, делящееся на 6;
2) a_n — n-е простое число;
3) a_n — n-е натуральное число, являющееся полным квадратом;
4) a_n — остаток от деления числа 2^n на n;
5) a_n — остаток от деления на 5 числа 3^n;
6) $a_n = 2^n + 1$;
7) $a_n = \dfrac{n-1}{n^2+1}$;
8) $a_{n+1} = 3a_n - n$; $a_1 = 2$;
9) $a_{n+1} = (-1)^n a_n + 4$; $a_1 = 2$;
10) $a_{n+1} = (a_n)^{0,5}$; $a_1 = 1024$.

Б

1) a_n — n-е натуральное число, дающее остаток 5 при делении на 7;
2) a_n — n-е составное число;
3) a_n — n-е натуральное число, не имеющее делителей, являющихся точными квадратами (кроме 1);

4) a_n — n-я цифра после запятой числа $\sqrt{2}+\sqrt{3}$;

5) a_n — n-я цифра после запятой числа $\sqrt{2}$;

6) a_n — последняя цифра числа 7^n;

7) $a_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$;

8) $a_{n+1} = 2a_n + (-1)^n$; $a_1 = 2$;

9) $a_{n+1} = a_{n+1} = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)a_n$; $a_1 = 1$;

10) $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}+1}{a_n}$; $a_1 = 1$; $a_2 = 2$.

В

1) a_n — n-е натуральное число, имеющее ровно три различных простых делителя;

2) a_n — n-е натуральное число, представимое в виде суммы квадратов двух различных целых чисел;

3) $a_n = \left[\dfrac{2^n}{n}\right]$, где $[a]$ — целая часть числа a;

4) a_n — целое число, ближайшее к $(\sqrt{2})^n$;

5) a_n — сумма n цифр после запятой в десятичной записи числа π;

6) $a_n = (-1)^k$, где k — число различных простых делителей числа n;

7) $a_n = \left[\dfrac{n^2}{n+1}\right]$;

8) $a_{n+1} = a_n \cdot 2^n$; $a_1 = 1$;

9) $a_{n+1} = \left[\sqrt{a_n}\right]$; $a_1 = 1\,000$;

10) $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$; $a_1 = 1$; $a_2 = -2$.

9.2. Для каждой последовательности, заданной несколькими первыми членами, предложите формулу общего члена, исследуйте ее следующие свойства: монотонность (с указанием характера монотонности), ограниченность, сходимость (существование предела и его значение).

А

1) $1, \dfrac{7}{3}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{7}{27}, \dfrac{1}{81}, \ldots$; 2) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2^2}{5}, \dfrac{3^2}{10}, \dfrac{4^2}{17}, \ldots$; 3) $1, -\dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{25}, -\dfrac{4}{125}, \ldots$;

4) $\cos 1, \dfrac{\cos 2}{2}, \dfrac{\cos 3}{3}, \dfrac{\cos 4}{4}, \ldots$; 5) $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{2}{2^2}, \dfrac{3}{2^3}, -\dfrac{4}{2^4}, \ldots$.

Б

1) $\frac{2+3}{1+1}, \frac{2^2+3^2}{2+3}, \frac{2^3+3^3}{2^2+3^2}, \frac{2^4+3^4}{2^3+3^3}, \ldots;$

2) $\frac{2}{2}, \frac{2^2+1}{8}, \frac{3^2+1}{18}, \frac{4^2+1}{32}, \frac{5^2+1}{50}, \ldots;$

3) $\operatorname{tg}1, \operatorname{tg}2, \operatorname{tg}3, \ldots$; 4) $\frac{1}{\sin 1}, \frac{2}{\sin 2}, \frac{3}{\sin 3}, \ldots;$

5) $\frac{2}{1}, -\frac{4}{1\cdot 2}, \frac{8}{1\cdot 2\cdot 3}, -\frac{16}{4!}, \frac{32}{5!}, \ldots$; 6) $\frac{1}{1}, \frac{1+2}{2^2}, \frac{1+2+3}{3^2}, \frac{1+2+3+4}{4^2}, \ldots$

В

1) $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \ldots$; 2) $\frac{2}{2}, \frac{3}{2^2}, \frac{2^3}{4}, \frac{5}{2^4}, \frac{2^5}{6}, \ldots;$

3) $\frac{\cos 1}{1}, -\frac{\cos 2}{2}, \frac{\cos 3}{3}, -\frac{\cos 4}{4}, \ldots$; 4) $\sin\frac{\pi}{7}, 2\sin\frac{2\pi}{7}, 3\sin\frac{3\pi}{7}, \ldots;$

5) $\frac{1}{1}, \left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{3}{5}\right)^3, \left(\frac{4}{7}\right)^4, \ldots;$

6) $\frac{1}{1}, \frac{1^2+2^2}{2^3}, \frac{1^2+2^2+3^2}{3^3}, \frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{4^3}, \ldots;$

7) $\sqrt{2}-1, \sqrt{3}-\sqrt{2}, \sqrt{4}-\sqrt{3}, \ldots$; 8) $\frac{\sqrt{2}}{1}, \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{3}, \frac{\sqrt{17}}{4}, \frac{\sqrt{26}}{5}, \ldots$

Суммирование последовательностей

9.3. Вычислите сумму последовательности.

А

1) $1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{27}{64}+\ldots$; 2) $1-\frac{2}{5}+\frac{4}{25}-\frac{8}{125}-\ldots$; 3) $4+\frac{4}{3}+\frac{4}{9}+\frac{4}{27}+\ldots;$

4) $1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}-\frac{4}{9}+\frac{1}{25}-\frac{8}{27}+\frac{1}{125}-\frac{16}{81}+\frac{1}{625}\ldots$

Б

1) $1+(\sqrt{7}-2)+(\sqrt{7}-2)^2+\ldots$; 2) $1+2+\frac{2}{5}+\frac{2}{3}+\frac{4}{25}+\frac{2}{9}+\frac{8}{125}+\frac{2}{27}+\ldots;$

3) $1+\sin 1+(\sin 1)^2+(\sin 1)^3+\ldots$; 4) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots;$

5) $\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots$

В

1) $1 + \varphi + \varphi^2 + \ldots$, где $\varphi = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$; 2) $1 + \dfrac{2}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{4}{2^3} + \ldots$;

3) $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \ldots$; 4) $1 + \dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{4} + \dfrac{7}{8} + \dfrac{9}{16} + \ldots$.

9.4. Превратите периодическую десятичную дробь в обыкновенную.

А

1) 0,222...; 2) 0,0444...; 3) 0,2(3); 4) 0,117117117...; 5) 0,5(25).

Б

1) 0,32(3); 2) 0,23(18); 3) 0,25(03); 4) 0,(714285); 5) 0,541(6).

Арифметическая прогрессия

А

9.5.

1) Являются ли $a_1 = -1$, $a_4 = 8$, $a_{11} = 29$ членами арифметической прогрессии?

2) Пусть $a_2 = 9$, $a_6 = 17$ — члены арифметической прогрессии. Найдите a_7, a_4, d, S_6.

3) Пусть $a_5 = 9$, $a_9 = -3$ — члены арифметической прогрессии. Найдите a_7, a_4, d, S_8.

4) Пусть $a_3 = 0$, $a_5 = 20$ — члены арифметической прогрессии. Найдите d.

5) Пусть для арифметической прогрессии $S_4 = 40$, $d = 4$. Найдите a_5.

Б

9.6.

1) Являются ли $a_1 = 8$, $a_4 = -10$, $a_{11} = -50$ членами арифметической прогрессии?

2) Пусть $a_2 = 1$, $a_5 = 13$ — члены арифметической прогрессии. Найдите a_7, a_{11}, d, S_{25}.

3) Пусть $a_5 = 3$, $a_8 = 11$ — члены арифметической прогрессии. Найдите a_7, a_4, d, S_6.

4) Пусть $a_3 = 0{,}027$, $a_5 = 0{,}003$ — члены арифметической прогрессии. Найдите d.

5) Пусть для арифметической прогрессии $S_{11} = -147$, $a_1 = 0{,}2$. Найдите d.

В

9.7.

1) Являются ли $a_2 = 1 + 3\sqrt{5}$, $a_4 = 1 + 7\sqrt{5}$, $a_{11} = 1 + 21\sqrt{5}$ членами арифметической прогрессии?

2) Пусть $a_3 = 3\sqrt{2}$, $a_6 = 12$ — члены арифметической прогрессии. Найдите a_7, a_{13}, d, S_{12}.

3) Пусть $a_3 = 0{,}07$, $a_9 = 0{,}008$ — члены арифметической прогрессии. Найдите b_7, b_4, q, S_{128}.

4) Пусть $a_3 = -0{,}001$, $a_5 = 0$ — члены арифметической прогрессии. Найдите S_6.

5) Существует ли арифметическая прогрессия, у которой $S_3 = 7$, $a_2 = 2$.

Геометрическая прогрессия

А

9.8.

1) Являются ли $b_1 = 3$, $b_1 = \dfrac{3}{8}$, $b_{11} = \dfrac{3}{1\,024}$ членами геометрической прогрессии?

2) Пусть $b_2 = 9$, $b_5 = -243$ — члены геометрической прогрессии. Найдите b_7, b_4, q, S_6.

3) Пусть $b_5 = 0{,}00001$, $b_8 = 0{,}00000001$ члены геометрической прогрессии. Найдите b_7, b_4, q, S.

4) Пусть $b_3 = 0{,}004$, $b_5 = 0{,}00004$ — члены геометрической прогрессии. Каким может быть q?

5) Пусть для геометрической прогрессии $S_4 = \dfrac{255}{6}$, $q = 4$. Найдите b_5.

Б

9.9.

1) Являются ли $b_1 = 7$, $b_4 = -7$, $b_{11} = 7$ членами геометрической прогрессии?

2) Пусть $b_2 = -1$, $b_5 = 0{,}125$ — члены геометрической прогрессии. Найдите b_7, b_{11}, q, S.

3) Пусть $b_5 = 3$, $b_8 = 3\sqrt[5]{27}$ — члены геометрической прогрессии. Найдите b_7, b_4, q, S_5.

4) Пусть $b_3 = 0{,}027$, $b_5 = 0{,}00243$ — члены геометрической прогрессии. Каким может быть q?

5) Пусть для геометрической прогрессии $S_3 = \frac{13}{90}$, $b_1 = 0{,}1$. Найдите q.

В

9.10.

1) Являются ли $b_2 = 0{,}5$, $b_4 = \frac{1}{72}$, $b_{11} = \frac{1}{15\,552}$ членами геометрической прогрессии?

2) Пусть $b_3 = 6\sqrt{2}$, $b_6 = 24$ — члены геометрической прогрессии. Найдите b_7, b_{13}, q, S_{12}.

3) Пусть $b_3 = 0{,}007$, $b_8 = 0{,}00000007$ — члены геометрической прогрессии. Найдите b_7, b_4, q, S.

4) Пусть $b_3 = -0{,}0011$, $b_5 = -0{,}000011$ — члены геометрической прогрессии. Каким может быть S_6?

5) Пусть для геометрической прогрессии $S_3 = 7$, $b_2 = 2$. Найдите b_1, q.

Предел функции

9.11. Вычислите предел функции.

А

1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2}{x^2+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x^3-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x^3+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+1}{x^2+2}$.

Б

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}$; 2) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x+\sqrt{x}-6}{x-5\sqrt{x}+6}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{2x+1}}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x}$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}-\frac{x^2-x+1}{x^2+x}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{2x+1}}{\sin x}$.

В

1) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\sin 5x}{\cos x+\cos 5x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\cdot\sin\frac{4}{x}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+3+5+\ldots+(2n+1)}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right)$.

■ Производная функции

9.12. Вычислите производную данной функции.

А

1) $y = -2x + 3$; 2) $y = x^4 - 3x^3 + x^2 - 1$; 3) $y = \frac{3x+1}{2}$;

4) $y = \frac{2x^2 - 6x - 7}{3}$; 5) $y = 0,5x^4 + 5x^3 - 0,2x^2 - 17$; 6) $y = -2x^{-2} + 1$;

7) $y = \frac{1}{2}x^{-2} - 5$; 8) $y = -\frac{2}{x^3}$; 9) $y = 3x^{\frac{4}{3}}$; 10) $y = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}$;

11) $y = \frac{1}{2\sqrt{x}} + x$; 12) $y = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt{x}$; 13) $y = \frac{1}{x\sqrt{x}} - 4$;

14) $y = x^2\sqrt{x} - 5x\sqrt[3]{x}$; 15) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{4\sqrt{x^3}}$; 16) $y = 3\sin x - 2\cos x$;

17) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; 18) $y = e^{2x} + 2x$; 19) $y = \ln(x - 1)$;

20) $y = 3\ln 2x - \frac{3}{x}$; 21) $y = x\sin x$; 22) $y = xe^{-x}$; 23) $y = (x + 1)\sqrt{x}$;

24) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$; 25) $y = \frac{\sin x}{x}$; 26) $y = \frac{1}{2}\sin 4x$; 27) $y = (3 - 2x)^4$;

28) $y = \sin 2x + \cos 4x$; 29) $y = \sqrt[3]{(2x-1)^2}$; 30) $y = \sqrt{4x+1}$;

31) $y = \frac{\cos 2x}{3x}$; 32) $y = \frac{2\ln x + 3}{x^2}$; 33) $y = (3x+5)\cos^2 x$;

34) $y = \frac{5\sin 3x}{6\cos 5x}$; 35) $y = (5x + 7)^3 \ln(5x + 7)$.

Б

1) $y = \frac{(2x-1)^3}{x}$; 2) $y = x^3(2x + 3)^2$; 3) $y = \frac{3x}{(x-1)^2}$; 4) $y = \left(\frac{x}{2} - 1\right)^{\frac{5}{4}}$;

5) $y = \sin x\cos 3x$; 6) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$; 7) $y = \sin 2x^2$; 8) $y = \sqrt{x^2 + 1}$;

9) $y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{3-x}}$; 10) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$; 11) $y = 3\sin^3(4x + 5)$; 12) $y = \frac{e^{(2x+3)^2}}{11x - 7}$;

13) $y = \sqrt[4]{\ln 2x}$; 14) $y = \sqrt[3]{\sin 2x}$; 15) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2x}$; 16) $y = \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$.

В

1) $y = \sqrt{3x^2 - \sqrt{x}}$; 2) $y = \frac{x\sin 4x}{\cos^2 2x}$; 3) $y = 2^{(x-1)^{\frac{5}{6}}}$; 4) $y = x^2\cos 2x$;

5) $y = e^{\sin x}$; 6) $y = \frac{\ln(1-3x)}{1-3x}$; 7) $y = \arcsin 2x$; 8) $y = \operatorname{tg}^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$;

9) $y=\dfrac{(2x-5)^3}{x\ln x}$; 10) $y=\left(\dfrac{1}{4x^5}+3x+7x^7\right)^4$; 11) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\ln 3x-1}}$;

12) $y=x\sqrt[3]{5x-1}+\sqrt{5x-1}$.

А

9.13. Найдите производную функции $y=f(x)$ в точке $x=a$.

1) $f(x)=4x^3+6x+4$, $a=1$; 2) $f(x)=\sqrt{2x-3}$, $a=2$;

3) $f(x)=\sin 2x$, $a=\dfrac{\pi}{6}$; 4) $f(x)=2x\cos x$, $a=0$;

5) $f(x)=e^x+5$, $a=\ln 5$; 6) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$, $a=0$.

Б

9.14. Выясните, при каких x производная функции $y=f(x)$ равна нулю.

1) $f(x)=2x+\cos 2x$; 2) $f(x)=2x^2-\ln 3x$; 3) $f(x)=2\sqrt{x}-3\ln(x+2)$;

4) $f(x)=\dfrac{x+2}{2\sqrt{x}+1}$; 5) $f(x)=\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}$; 6) $f(x)=(5-3x)e^{2x}$.

В

9.15. Выясните, имеются ли на графике функции $y=f(x)$ точки, в которых значение производной больше нуля.

1) $f(x)=\sqrt{-3-2x-x^2}$; 2) $f(x)=x\sqrt{(x+5)^3}$; 3) $f(x)=(x+5)^4(5-2x)$;

4) $f(x)=x-6\sin\dfrac{x}{3}$.

■ Применение производной функции

А

9.16.

1) Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

а) $f(x)=2x^2$, $x_0=\dfrac{1}{4}$; б) $f(x)=x^2-2x+1$, $x_0=0$;

в) $f(x)=x^3-3x^2+3$, $x_0=2$; г) $f(x)=\sin x+x$, $x_0=0$.

2) В каких точках угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ равен числу a?

а) $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 1$, $a = 3$; б) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 5$, $a = 3$;

в) $f(x) = x\,(x + 1)$, $a = 3$; г) $f(x) = \sin 2x$, $a = 2$.

3) Касательная к графику функции $y = f(x)$ образует с осью Ox угол α. Найдите координаты точки касания.

а) $f(x) = 2x^2$, $\alpha = 45°$; б) $f(x) = 2\sin x$, $\alpha = 135°$;

в) $f(x) = e^{-x}$, $\alpha = 135°$; г) $f(x) = \cos 2x$, $\alpha = 60°$.

9.17. Запишите уравнение касательной к графику функции в точке с заданной абсциссой.

1) $y = x^2 - 4$; $x = 3$; 2) $y = x - x^2$; $x = -4$; 3) $y = x^3 + 1$; $x = -1$;

4) $y = \dfrac{2}{x}$; $x = -1$; 5) $y = \sqrt{x}$; $x = 4$; 6) $y = \sin 2x$; $x = \dfrac{7\pi}{12}$;

7) $y = -\cos x$; $x = \dfrac{\pi}{2}$; 8) $y = e^{-x}$; $x = 0$; 9) $y = 2\ln(1 + x)$; $x = 0$;

10) $y = x + \dfrac{1}{x}$; $x = -3$.

Б

9.18. 1) Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

а) $f(x) = \cos 4x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{12}$; б) $f(x) = \dfrac{1}{2x^2}$, $x_0 = 1$;

в) $f(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$, $x_0 = 3$; г) $f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$, $x_0 = 7$.

2) В каких точках графика функции $y = f(x)$ касательная параллельна прямой $y = kx + b$?

а) $f(x) = \sqrt{5x + 1}$, $y = \dfrac{5x + 1}{8}$; б) $f(x) = \sqrt{3x + 1}$, $y = \dfrac{3x - 2}{4}$;

в) $f(x) = \cos 2x$, $y = -2x + 1$; г) $f(x) = e^{1-x}$, $y = 1 - x$.

3) В каких точках графика функции $y = f(x)$ касательная перпендикулярна прямой $y = kx + b$?

а) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$, $y = \dfrac{2x + 1}{6}$; б) $f(x) = x^4 + x + 8$, $y = \dfrac{3x + 4}{9}$;

в) $f(x) = \ln 2x$, $y = -2x + 3$; г) $f(x) = e^{-2x+3}$, $y = \dfrac{x - 5}{2}$.

9.19. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{x^5 - 32}{5}$ в точке его пересечения с осью абсцисс.

9.20. На графике функции $y = x(x^2 - 6x)$ найдите точки, в которых касательные к графику параллельны оси абсцисс.

9.21. Составьте уравнения касательных к кривым $y = 16x^3$ и $y = 1/x$, проходящих через точку пересечения этих кривых, находящуюся в I квадранте.

9.22. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = e^{-x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

9.23. Какая из следующих прямых: $y = 2x + 1 - \frac{\pi}{6}$; $y = 3x + 1 - \frac{\pi}{4}$; $y = 6x + 1 - \frac{\pi}{2}$ является касательной к графику функции $y = \operatorname{tg} 3x$?

9.24. Найдите координаты точки пересечения двух касательных, проведенных к графику функции $y = \sin 3x$, первая — в точке на графике с абсциссой $x = \frac{\pi}{18}$, а вторая — в точке с абсциссой $x = \frac{5\pi}{18}$.

9.25. Найдите уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{4 - 2x - x^2}$, проходящей через точку (3, 0).

9.26. Найдите все значения x, при которых касательные к графикам функций $y = 3\cos 5x$ и $y = 5\cos 3x + 2$ в точках с абсциссой x параллельны.

9.27. Найдите координаты точек пересечения с осью Ox касательных к графику функции $y = \frac{x+1}{x-3}$, которые образуют угол $\frac{3}{4}\pi$ с осью Ox.

B

9.28. Через точку $A(-3; 1)$ проведена прямая, которая является касательной к графику данной функции. Определите угол наклона этой прямой к оси абсцисс: а) $y = \sqrt{8 - x^2}$; б) $y = \sqrt{5 - x^2}$.

9.29. В точке пересечения графиков функций $y = \frac{3}{\sqrt{x}}$ и $y = \frac{6}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$ проведена касательная к каждому графику. Найдите разность углов, образованных этими касательными с положительным направлением оси Ox.

9.30. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x \ln x$ в точке ее пересечения с прямой $y = x$.

9.31. В точке $M(1; 4)$ к кривой $y = \sqrt[3]{(9 - x^{\frac{3}{5}})^2}$ проведена касательная. Найдите длину ее отрезка, заключенного между осями координат.

9.32. Подберите параметр a так, чтобы касательная к графику функции $y = 1 - ax^2$ в точке пересечения с осью абсцисс была наклонена к ней под углом $120°$.

9.33. Найдите координаты точки пересечения двух касательных, проведенных к графику функции $y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 3}$: первая — в точке с абсциссой $x = 4$, а вторая — в точке с абсциссой $x = -2$.

9.34. Найдите уравнение такой касательной к графику функции $y = x^3 + 3x + 2$, для которой существует параллельная касательная к графику функции $y = \sin 2x$.

9.35. К графику функции $y = 3x - x^2$ проведены две касательные: первая — в точке с абсциссой $x_0 = 2$, вторая — в точке максимума данной функции. Найдите площадь треугольника, образованного осью ординат и этими касательными.

9.36. Найдите уравнение прямой, касающейся графика функции $y = x^4 - 4x^3$ в двух различных точках.

9.37. Через точку $A(2; 0)$ к графику функции $y = 3 - x^2$ проведены касательные. Напишите их уравнения.

9.38. Через точку $A(2; 0)$ к графику функции $y = \sqrt{1 - x}$ проведена касательная. Напишите ее уравнение.

9.39. Найдите уравнения касательных к графику функции $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$, каждая из которых вместе с осями координат ограничивает треугольник площадью 2.

■ Исследование функции с помощью производной

□ Промежутки монотонности функций

А

9.40.

1) Докажите, что функция является монотонной на всей области определения.

а) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 2$; б) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + 5$; в) $y = x + \sin x$;

г) $y = \cos x + 3x$; д) $y = x + 2\ln(x + 3)$.

2) Найдите промежутки возрастания (убывания) функции.

а) $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 3$; б) $y = x^4 - 4x^2$; в) $y = x + \frac{16}{x}$;

г) $y = \frac{x^2 - 1}{x}$.

Б

9.41.

1) Найдите промежутки монотонности функции.

а) $y = \frac{x^2 + x - 4}{x^2}$; б) $y = \frac{2x - 3}{x - 1}$; в) $y = (x - 2)e^{2x}$; г) $y = x - e^{2x}$.

2) При каких значениях параметра a функция $y = f(x)$ будет монотонна на области определения?

а) $f(x) = x^3 + ax$; б) $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax$; в) $f(x) = e^x - ax$;

г) $f(x) = \sin x + ax$.

В

9.42.

1) Найдите промежутки монотонности функции $y = f(x)$.

а) $f(x) = xe^{-5x}$; б) $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$; в) $y = e^{3x^2+2x-1}$; г) $f(x) = 8^x - 32^x$.

2) Определите, при каких значениях параметров функция $y = f(x)$ обладает указанным свойством.

а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + (a - 1)\,x^2 + 2$ монотонно возрастает на множестве действительных чисел;

б) $f(x) = -x^3 + 3bx^2 + 3(a - 1)x - 1$ возрастает только на интервале $(3; 4)$;

в) $f(x) = x^3 + 3b - x^2 - 3(a - 1)x - 1$ убывает только на интервале $(-3; -2)$;

г) $f(x) = (a + 2)x^3 + 6x^2 + (a + 3)x - 1$ убывает на всей области определения.

☐ Экстремумы функции

9.43. Определите, имеет ли функция $y = f(x)$ экстремумы. Найдите их.

А

1) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4$; 2) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; 3) $f(x) = 2 - 6x - 2x^3 + x^2$;

4) $f(x) = x\,(x - 2)^2$; 5) $f(x) = 0{,}8x^5 + 4x^3 + 9x - 8$; 6) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$;

7) $f(x) = xe^{-x}$; 8) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$.

Б

1) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; 2) $f(x) = x^2 - \ln(1 - 2x)$; 3) $f(x) = x + \dfrac{1}{1+x^2}$;

4) $f(x) = x^2 \ln x$; 5) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$; 6) $f(x) = 2x + \sin x$;

7) $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$; 8) $f(x) = (2x + 1)^4 - x$.

В

1) $f(x) = \sqrt{2+3x-x^2}$; 2) $f(x) = \ln(x^2 + 3x)$; 3) $f(x) = x^2e^{x^2}$;

4) $f(x) = x - 6\sin\dfrac{x}{3}$.

9.44. Проведите исследование функции и постройте ее график.

А

1) $y = 7 - 6x - x^2$; 2) $y = x^3 - 3x - 2$; 3) $y = x^4 - 2x^3 + 1$;

4) $y = \dfrac{x^4}{2} - 2x^2 - 6$; 5) $y = x + \dfrac{4}{x}$; 6) $y = 4x - \dfrac{1}{x}$; 7) $y = x - 3 - 2\sqrt{x}$;

8) $y = x + e^{-x}$; 9) $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$; 10) $y = x^4 - 10x^2 + 9$.

Б

1) $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$; 2) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; 3) $y = \dfrac{x+2}{x^2-9}$; 4) $y = \dfrac{1-x}{(x-2)^3}$;

5) $y = \dfrac{x^2+2x}{x-1}$; 6) $y = \dfrac{2x}{x^2+x+1}$; 7) $y = \dfrac{x^2}{x^3-1}$; 8) $y = \dfrac{-x}{x^2+4}$;

9) $y = x + \sin x$; 10) $y = x^4(x - 12)^2$.

В

1) $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-4)}$; 2) $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$; 3) $y = e^x \cos x$;

4) $y = 2\ln x + x\left(\dfrac{x}{2} - 3\right)$; 5) $y = 7\cos\dfrac{x}{2} - x$; 6) $y = 2\sin\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{3}$;

7) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; 8) $y = \dfrac{x}{x^2-9}$.

□ Исследование функции на промежутке

9.45. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на указанном промежутке.

А

1) $y = 7 - x - x^2$, $[-4;\ 2]$; 2) $y = 2x^2 - 5x + 3$, $[-3;\ 0]$;
3) $y = x^3 - 12x + 5$, $[-2;\ 1]$; 4) $y = x^4 + 2x^3 - 8$, $[-1;\ 1]$;
5) $y = -x^3 - 9x^2 + 3$, $[-2;\ 3]$.

Б

1) $y = \sin x - \frac{1}{2}x$, $\left[2\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$; 2) $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$, $[-2;\ 2]$;

3) $y = x - 2\sqrt{x}$, $[2;\ 3]$; 4) $y = \sin^2 x$, $\left[-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{4}\right]$.

В

1) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x$, $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right]$; 2) $y = (2x - 1)e^{3x}$, $[0;\ 1]$;

3) $y = 2x\ln x - x\ln 49$, $[1;\ 7]$; 4) $y = \ln^2 x - \ln^3 x$, $[1;\ 2e]$.

□ Непрерывность функции

А

9.46. Найдите точки разрыва функции. Постройте эскиз графика функции.

1) $y = \frac{x}{x^2-1}$; 2) $y = \frac{x-1}{x^2}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}$; 4) $y = \operatorname{tg}\sqrt{4-x^2}$.

Б

9.47. Найдите точки разрыва производной функции и постройте эскизы графиков данной функции и ее производной вблизи точек разрыва.

1) $y = |x - 1|$; 2) $y = |x^2 - 4| - 3x$; 3) $y = \frac{1}{x^2 - |x|}$; 4) $y = \sqrt{|x-2|}$.

В

9.48. Доопределите, если это возможно, функцию в точке разрыва так, чтобы она стала непрерывной в этой точке. Постройте эскиз графика.

1) $y = \frac{x+1}{x^3+1}$; 2) $y = \frac{\sqrt{|x^2-1|}}{x-1}$; 3) $y = \frac{\sin 2x}{x}$; 4) $y = \frac{e^{2x}-1}{x}$.

Матричные тесты

■ Производная функции ■ Первообразная функции ■ Касательная к графику функции ■ Наибольшее и наименьшее значения функции

■ Производная функции

9.49. Сопоставьте функции ее производную.

А

Функция	Производная			
	$\dfrac{1}{x}$	$2x$	$-2\cos x\sin x$	$\cos(x+2)$
x^2+1				
$\sin(x+2)$				
$\ln x$				
$\cos^2 x$				

Б

Функция	Производная			
	$\dfrac{2x}{x^2+1}$	$3x^2\sin 2x^3$	$\cos x e^{\sin x}$	$1{,}5\sqrt{x}$
$\sin^2 x^3$				
$x\sqrt{x}$				
$\log(x^2+1)$				
$e^{\sin x}$				

В

Функция	Производная			
	$5^{(\sin x+x)}\ln 5\times$ $\times(\cos x+1)$	$\cos x\log_2 x+$ $+\sin x\dfrac{1}{x\ln 2}$	$\dfrac{-\sin x}{\cos^2\cos x}$	$\dfrac{\dfrac{\sin^2 x}{x}-\ln x\sin 2x}{\sin^4 x}$
$\operatorname{tg}(\cos x)$				

Функция	Производная			
	$5^{(\sin x+x)}\ln 5\times$ $\times(\cos x+1)$	$\cos x\log_2 x+$ $+\sin x\frac{1}{x\ln 2}$	$\frac{-\sin x}{\cos^2\cos x}$	$\frac{\frac{\sin^2 x}{x}-\ln x\sin 2x}{\sin^4 x}$
$5^{(\sin x+x)}$				
$\frac{\ln x}{\sin^2 x}$				
$\sin x\log_2 x$				

■ Первообразная функции

9.50. Сопоставьте функции ее первообразную.

А

Функция	Первообразная			
	$0{,}5\ln x$	$3x$	$\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$	$-\cos x$
3				
$\sin x$				
$\frac{1}{2x}$				
$\sqrt[3]{x}$				

Б

Функция	Первообразная			
	$x\sin x$	$\ln(\ln x)$	e^{5x}	$\sin^2 x$
$\frac{1}{x\ln x}$				
$\sin 2x$				
$\sin x+x\cos x$				
$5e^{5x}$				

В

Функция	Первообразная			
	$\ln(\cos x)$	$\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x$	e^{x^5}	$\operatorname{tg} x^2$
$\frac{2x}{\cos^2 x^2}$				
$-\operatorname{tg} x$				
$\sin^3 x$				
$5x^4 e^{x^5}$				

■ Касательная к графику функции

9.51. Сопоставьте функции угловой коэффициент касательной к ее графику в точке $x = 1$.

А

Функция	Угловой коэффициент касательной			
	0	2	1	$-\sin 1$
1				
$x + 1$				
x^2				
$\cos x$				

Б

Функция	Угловой коэффициент касательной			
	$\frac{2}{\cos^2 2}$	2	4	$2e^2$
$\operatorname{tg} 2x$				
x^4				
e^{2x}				
$\ln x^2$				

В

Функция	Угловой коэффициент касательной			
	$1{,}5\sin 2\cos 1$	$25\ln 25$	0	$-\sin 1\cos^{-2}(\cos 1)$
$\ln^2 x^3$				
5^{2x}				
$\sin^3 x$				
$\mathrm{tg}(\cos x)$				

■ Наибольшее и наименьшее значения функции

9.52. Сопоставьте функции ее наибольшее и наименьшее значения на промежутке $[-3; 3]$.

А

Функция	Наибольшее и наименьшее значения			
	2; 2	0; 16	–6; 6	e^{-3}; e^3
$f(x) = 2$				
$f(x) = 2x$				
$f(x) = (x-1)^2$				
$f(x) = e^x$				

Б

Функция	Наибольшее и наименьшее значения			
	–1; 1	0; 3	0; ln 7	–10; –1
$f(x) = \lvert x\rvert$				
$f(x) = -(x^2+1)$				
$f(x) = \sin x$				
$f(x) = \ln(x+4)$				

B

Функция	Наибольшее и наименьшее значения			
	0; 5	0; 2	–3; 6	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$
$f(x) = \lvert 4 - x^2 \rvert$				
$f(x) = \lvert 2\sin x \rvert$				
$f(x) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{18}x\right)$				
$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, x > -2, \\ 1, x \le -2 \end{cases}$				

Самостоятельные работы

■ Последовательность ■ Предел функции ■ Производная функции ■ Исследование функции с помощью производной

■ Последовательность

A

9.53.

Вариант 1

1) Вычислите 5-й член последовательности, заданной формулой $a_n = 2^n - 1$.
2) Задана арифметическая прогрессия: $a_3 = 2$, $d = 3$. Найдите a_7, S_7.
3) Задана геометрическая прогрессия: $b_4 = 8$, $q = 0{,}5$. Найдите b_7, S_5.

Вариант 2

1) Вычислите 10-й член последовательности, заданной формулой $a_n = n^2 + n$.
2) Задана арифметическая прогрессия: $a_3 = 3$, $d = 2$. Найдите a_6, S_6.
3) Задана геометрическая прогрессия: $b_3 = 2$, $q = \frac{1}{3}$. Найдите b_5, S_5.

Б

9.54.

1) Вычислите 5-й член последовательности, заданной формулой $a_n = n^2 + a_{n-1}$, $a_1 = 2$.

2) Задана арифметическая прогрессия: $a_3 = 17$, $a_7 = 33$. Найдите a_{10}, S_8.

3) Задана геометрическая прогрессия: $b_3 = 4$, $b_6 = -32$. Найдите S_9, b_9.

В

9.55.

1) Найдите 10-й член последовательности чисел Фибоначчи: $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n > 2$.

2) Задана арифметическая прогрессия: $a_3 = 5$, $S_7 = 49$. Найдите a_{14}, d.

3) Задана возрастающая геометрическая прогрессия: $b_3 = 4$, $S_3 = 12$. Найдите S_{10}, q.

■ Предел функции

9.56. Вычислите предел функции.

А

Вариант 1

1) $\lim\limits_{x\to1}(x^2+4)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x}{x^2+4}$; 3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$.

Вариант 2

1) $\lim\limits_{x\to-2}(x^3+9)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-4x+7}{4-x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3-8x}{x^2+2x}$.

Б

1) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x^2-9}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^4-x^3}}{5x^2+x}$.

В

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-6x}{\sqrt{9x^4+2x-6}}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}}{\sqrt{2n+5}-\sqrt{3n-6}}$.

Производная функции

9.57. Вычислите производную функции.

А

Вариант 1

1) $\cos(x^2)$; 2) $\ln(4x)\,\mathrm{tg}\,x$; 3) $\dfrac{\sin x^3}{5^{x+1}}$.

Вариант 2

1) $\sin(x^5 + x)$; 2) $\mathrm{tg}(4^{2x})x^4$; 3) $\dfrac{4^{\ln x}}{\arcsin x}$.

Б

1) $\log(x^4 + x)$; 2) $5\cos 8x \cos^5(x^2)$; 3) $\dfrac{\arccos x^5}{5^{2x}}$.

В

1) $\ln(x^4 + x)$; 2) $4\cos^5 3x \sin(2x - 3)$; 3) $\dfrac{\arccos x}{e^{2x}}$.

Исследование функции с помощью производной

А

9.58. Для данной функции:

1) найдите точки экстремума функции;

2) найдите наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке;

3) напишите уравнение касательной к графику функции в точке.

Вариант 1

Дана функция $f(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 21$ (промежуток $[-1; 3]$; точка $x = 1$).

Вариант 2

Дана функция $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 3$ (промежуток $[-1; 4]$; точка $x = 2$).

9.59. Для данной функции:

1) найдите точки разрыва функции и определите поведение функции вблизи точек разрыва;

2) найдите точки экстремума функции;

3) напишите уравнение касательной к графику функции в точке $x = 2$.

Б

Дана функция $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

В

Дана функция $f(x) = \dfrac{e^{2x-1}}{x^2 - 2}$.

Контрольные тесты с выбором ответа

■ Техника дифференцирования ■ Касательная к графику функции ■ Монотонность и экстремумы ■ Наименьшее и наибольшее значения функции

■ Техника дифференцирования

А

9.60. Вычислите значение производной функции $y = 2x \ln x - x \ln 49$ при $x = 7$.

а	б	в	г
0	$\dfrac{13}{7}$	2	$\dfrac{15}{7}$

Б

9.61. Дана функция $f(x) = \dfrac{1}{2} \sin x \operatorname{tg} 2x + 2{,}5 \cos x$. Вычислите $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

а	б	в	г
$-1{,}5$	0	1,5	Не имеет смысла

В

9.62. Дана функция $y = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 2x - \cos 4x + 3}$. Вычислите $y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

а	б	в	г
$\dfrac{3+\sqrt{3}}{32}$	$\dfrac{3+2\sqrt{3}}{16}$	$-\dfrac{3}{16}$	1

Касательная к графику функции

А

9.63. Касательная к графику функции $y = (x-1)^2 x$ параллельна оси Ox, но не совпадает с ней. Найдите координаты точки касания.

а	б	в	г
$\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{27}\right)$	$\left(\frac{1}{3}; -\frac{4}{27}\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{27}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{2}{\sqrt{27}}\right)$

Б

9.64. Выберите координаты точки, через которую проходит касательная, проведенная к графику функции $y = e^x(x^2 - 3x + 1)$ в точке $x_0 = 0$.

а	б	в	г
(–1; 0)	(–1; 2)	(1; –1)	(2; 0)

Монотонность и экстремумы

А

9.65. Укажите точку максимума функции, если производная функции имеет вид: $y'(x) = (x^2 - 9)\ln(x-1)$.

а	б	в	г
$x = -3$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$

Б

9.66. Сколько целых значений x внутри промежутка возрастания функции $y = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x + 12$?

а	б	в	г
3	4	5	6

В

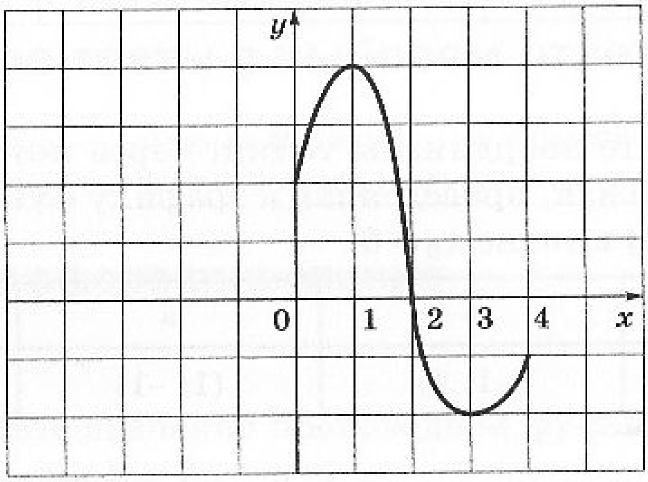
9.67. Вычислите наименьшее натуральное значение a, при котором функция $y = x^4 - 4x^2 + a + 2$ имеет положительный минимум.

а	б	в	г
$a = 1$	$a = 2$	$a = 3$	$a = 4$

■ Наибольшее и наименьшее значения функции

А

9.68. Используя график производной функции, укажите точку x, в которой функция принимает наибольшее значение.



а	б	в	г	д
$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$

Б

9.69. Сколько существует целых чисел, которые не входят в множество значений функции $y = x^3 + \dfrac{48}{x}$?

а	б	в	г
1	63	151	Таких точек нет

В

9.70. Вычислите наибольшее целое отрицательное значение a, при котором уравнение $x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + a = 0$ имеет один корень.

а	б	в	г
-1	-2	-3	-4

ГЛАВА

10 Интеграл и его применение

Тренажеры

■ Первообразные ■ Свойства первообразных ■ Формула Ньютона — Лейбница ■ Вычисление площади поверхности тела ■ Вычисление объема

■ Первообразные

10.1. Вычислите первообразные данных функций.

А

1) x^2+1; 2) $3x^2+4x-3$; 3) $4x^3+x-5$; 4) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-3$;

5) $\frac{x^2+x-3}{3}$; 6) $2\sin x-3\cos x$; 7) $3e^x-x+1$;

8) $x\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}-\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$; 9) $\frac{x^2-1}{x}$; 10) $\frac{\sqrt{x}+x-1}{x}$.

Б

1) $(2x-1)^5$; 2) $3\sin(3x)$; 3) $e^{2x}-(2x)^{-2}$; 4) $\frac{x^2+4\sqrt{x}-3}{4x^3}$; 5) $\frac{1}{2x+1}$;

6) $\sin\frac{x}{2}$; 7) $\frac{x+1}{2x^2}$; 8) $2e^{2x-3}$; 9) $\sqrt{3x-4}$; 10) $(2^x+1)^2$.

В

1) $3x^3+4x\sqrt{x}+\frac{1}{2x+3}$; 2) $3\sin(3x)+\cos(2x-4)$;

3) $4x^3+x+\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$; 4) $\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x^3}-\cos x\sin x$; 5) $\frac{2}{1+4x^2}$;

6) $3\cos(2x)+\frac{1}{x+4}$; 7) $\frac{1}{1+x^2}$; 8) $xe^{x^2+1}+0{,}5$; 9) $8\sin^4 2x$;

10) $x\sqrt{x}+e^{-2x-1}$.

Свойства первообразных

А

10.2. Для функции $y = f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $A(x_0; y_0)$.

1) $f(x) = 2x^3$, $A(-1; 2)$; 2) $f(x) = 3x^5$, $A(1; 3)$;

3) $f(x) = x^{-4}$; $A(2; -3)$; 4) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $A(1; 1)$;

5) $f(x) = 10x\sqrt{x}$, $A(1; 5)$; 6) $f(x) = \cos 3x$, $A\left(0; \frac{1}{3}\right)$;

7) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x - \frac{1}{8}$, $A(1; 3)$; 8) $f(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$, $A\left(\frac{1}{4}; 3\right)$.

Б

10.3. Найдите значения k, при которых функция $y = f(x)$ является первообразной для функции $y = g(x)$.

1) $y(x) = k\sqrt{x} + 7$, $g(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$; 2) $f(x) = kx^2 + x + 12$, $g(x) = 8x + 1$;

3) $f(x) = k\sin 2x + x^2 - 1$, $g(x) = 4\cos 2x + 2x$;

4) $f(x) = k\left(\frac{1}{7}\cos 7x + \cos x\right)$, $g(x) = \sin 2x \cos 3x \cos 2x$.

В

10.4. Для данной функции $y = f(x)$ найдите первообразную, график которой касается прямой $y = kx + b$.

1) $f(x) = (1 - x)(x - 2)^2$, $y = -2x - 1$;

2) $f(x) = (x + 2)(x + 3)^2$, $y = 18x$; 3) $f(x) = \frac{2}{(1-2x)^3}$, $y = 4 - 2x$;

4) $y(x) = \frac{1}{(2x-5)^5}$, $x > 0{,}5$, $y = x - 8$.

Формула Ньютона — Лейбница

10.5. Вычислите интегралы.

А

1) $\int\limits_1^3 3x^4 dx$; 2) $\int\limits_{-1}^0 (2x^3 + 1)dx$; 3) $\int\limits_{-1}^1 (2x^2 - 5x - 7)dx$; 4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$;

5) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{3x^6}$; 6) $\int\limits_2^8 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 7) $\int\limits_0^3 \left(\frac{x^2 - 12}{3}\right)dx$; 8) $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x^2}dx$; 9) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)dx$;

10) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x + x)dx.$

Б

1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 5x dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\pi}\cos 3x dx$; 3) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 4} e^{2x}dx$; 4) $\int\limits_{0}^{\ln 4} e^{\frac{x}{2}}dx$; 5) $\int\limits_{1}^{5}\sqrt{2x-1}dx$;

6) $\int\limits_{0}^{-3}\sqrt{1-x}dx$; 7) $\int\limits_{2}^{4}(2x-3)^2dx$; 8) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)dx$;

9) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\cos 2x dx$; 10) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos x\cos 2x dx.$

В

1) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2x dx$; 2) $\int\limits_{1}^{\sqrt{12}}\frac{xdx}{\sqrt{16-x^2}}$; 3) $\int\limits_{0}^{\ln 2}\left(e^x+e^{-x}\right)dx$;

4) $\int\limits_{0}^{\log_3 2}\left(3^x-1\right)^2dx$; 5) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{12}}6\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)dx$; 6) $\int\limits_{0}^{\pi}8\sin^4 x dx.$

10.6. Вычислите площади фигур, ограниченных графиками функций.

А

1) $y = 3x - 1,\ x = 2,\ y = 0$; 2) $y = x^2,\ y = 0,\ x = 2$;
3) $y = 4 - x^2,\ y = 0$; 4) $y = (x + 1)^2,\ y = 0,\ x = 0$;
5) $y = x^3 + 1,\ y = 1,\ x = 2$; 6) $y = \sin x,\ y = 0,\ 0 \le x \le \pi$;
7) $y = \frac{1}{x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2$; 8) $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 2$;
9) $y = e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2$; 10) $y = x^3,\ y = 0,\ x = 2.$

Б

1) $f_1 = e^x,\ f_2 = -x^2 + xe + 1$; 2) $f_1 = x^3,\ f_2 = -x^2 + 2x$;
3) $f_1 = 3x - 1,\ f_2 = x^2 - x + 2$; 4) $f_1 = x^2 - 13x + 30,\ f_2 = 2x^2 - 18x + 36$;
5) $f_1 = 2x^2 - 10x + 12,\ f_2 = x^2 - 4x + 4$;
6) $f_1 = x^2 - 5x + 4,\ f_2 = -x^2 + 3x - 2$; 7) $f_1 = \sin x,\ f_2 = x(-\pi + x)$;

8) $f_1 = \dfrac{1}{x}$, $f_2 = 0{,}5x^2 - 2x + 2{,}5$; 9) $f_1 = 18\sqrt{x}$, $f_2 = 2x^2 - 4x + 20$;

10) $f_1 = 2\cos x$, $f_2 = 0{,}25x^2 - x + 1$, $x = 1$, $x = 2$.

В

1) $f_1 = \cos x$, $f_2 = -x^2 + \dfrac{\pi^2}{4}$; 2) $f_1 = -|x| + 2$, $f_2 = x^2 - 6x + 6$;

3) $f_1 = \sin \pi x$, $f_2 = x^2 - x$; 4) $f_1 = |x + 1| - 2$, $f_2 = x^2 + 2x + 7$;

5) $f_1 = -|x - 2| - 2$, $f_2 = -x^2 + \dfrac{8}{3}x$, $1 \le x \le 3$;

6) $f_1 = \cos\dfrac{\pi}{2}x$, $f_2 = 0{,}5x^2 + 0{,}5$; 7) $f_1 = -|x - 3| + 3$, $f_2 = x^2 - 6|x|$;

8) $f_1 = |x - 2| - 2$, $f_2 = -x^2 + 4x + 6$.

Вычисление площади поверхности тела

10.7. Вычислите боковую и полную поверхность тела.

А

1) Правильная треугольная пирамида, высота которой равна 2, а сторона основания — 1.
2) Конус с радиусом основания 1 и высотой 4.
3) Четверть шара радиуса 3 см.
4) Цилиндр, высота которого равна 5 см, а радиус основания равен 3 см.
5) Прямой параллелепипед высотой 3 см, в основании которого находится ромб со стороной 2 и углом 60°.
6) Конус, осевое сечение которого — равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой 6.
7) Цилиндр, осевое сечение которого — квадрат со стороной 4.
8) Правильная четырехугольная пирамида с ребром 1 см.

Б

1) Основанием пирамиды $SABC$ служит равносторонний треугольник со стороной 6. Боковое ребро SA равно 8 и перпендикулярно плоскости основания.
2) Усеченный конус, у которого высота и радиус верхнего основания равны 2, радиус нижнего основания равен 4.
3) Правильная шестигранная призма с ребром 4 см.
4) Часть поверхности конуса, высота которого равна 8 см, радиус основания равен 6 см, заключенная между основанием и линией,

образуемой точками, в которых шар, вписанный в конус, касается его боковой поверхности.
5) Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник с прямым углом ACB с катетами $AC = 8$ и $BC = 6$. Через сторону BC и вершину A_1 проведена плоскость, при этом угол при вершине CBA_1 равен 60°.

В

1) Правильная усеченная четырехугольная пирамида, сечение которой, содержащее два противоположных ребра, — равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 6 и углом при основании 45°.
2) Часть цилиндра, радиус которого равен 4 см, а высота равна 7 см, не являющаяся частью полушария радиуса 4, если их основания совпадают.

■ Вычисление объема

10.8. Вычислите объем тела двумя способами:

а) непосредственно, пользуясь формулами для вычисления объема;
б) с помощью интегральной формулы для вычисления объема.

А

1) Цилиндр высотой 5 и радиусом основания 3.
2) Треугольная пирамида, в основании которой — правильный треугольник со стороной 1, высотой 6.
3) Конус с радиусом основания 1 и высотой 4.
4) Четверть шара радиусом 3.
5) Прямой параллелепипед высотой 3, в основании которого — ромб со стороной 2 и углом 60°.
6) Конус, осевое сечение которого представляет собой прямоугольный равнобедренный треугольник с гипотенузой, равной 6 см.
7) Правильная четырехугольная пирамида, все ребра которой равны 1.
8) Цилиндр, осевое сечение которого — квадрат со стороной 4.

Б

1) Полушарие радиусом 4 без вписанного в него конуса, имеющего с ним общее основание.

2) Усеченный конус высотой 2, радиусом верхнего основания 2, нижнего — 4.
3) Правильная усеченная четырехугольная пирамида, у которой стороны основания равны соответственно 2 и 5 см, а боковая грань наклонена к основанию под углом 45°.

В

1) Правильный тетраэдр с ребром 4.
2) Часть правильной шестигранной призмы, все ребра которой равны 4, не имеющая внутренних общих точек с вписанной в нее правильной треугольной призмой.
3) Часть конуса высотой 10 см и радиусом основания 5 см, которая получится, если из него вырезать правильную четырехугольную пирамиду, вписанную в конус, имеющую общую с конусом вершину.
4) Часть цилиндра радиусом 4 и высотой 7, находящаяся вне полушария радиуса 4, если их основания совпадают.

Матричные тесты

■ Первообразные ■ Точки пересечения ■ Формула Ньютона — Лейбница

■ Первообразные

10.9. Сопоставьте функции ее первообразную.

А

Функция	Первообразная			
	$0{,}5x^2$	$\ln x$	$0{,}25x^4 + x$	$-\cos x$
x				
$x^3 + 1$				
$\sin x$				
$x^{-1}, x > 0$				

Б

Функция	Первообразная			
	$0{,}5\sin(x^2) + \ln x$	e^x	$0{,}25x^4 + x$	$-\cos(2x)$
e^x				
$x^3 + 1$				
$2\sin(2x)$				
$x\cos(x^2) + x^{-1}$				

В

Функция	Первообразная			
	$\mathrm{arctg}(x)$	$2\ln x$	$-0{,}25\cos(2x)$	$\sqrt[7]{x+4}\ (x+4)$
$\sqrt[7]{x+4}$				
$\dfrac{1}{1+x^2}$				
$\cos x \sin x$				
$2x^{-1}$				

■ Точки пересечения

10.10. Найдите координаты точек пересечения с осью абсцисс.

А

Функция	0; –1	0; π	1	Точек пересечения нет
$x^2 + x$				
$\ln x$				
$\sin x$				
x^{-1}				

Б

Функция	0; π	0; 2	5	Точек пересечения нет
$-x^2 + 2x$				
$\ln(x-4)^4$				
$\operatorname{tg} x$				
e^x				

В

Функция	0	–2; 2	–1	–1; 1
$x^4 - 16$				
$\ln(x^2)$				
$\operatorname{arctg}(x+1)$				
$x^{0,5}$				

■ Формула Ньютона — Лейбница

10.11. Сопоставьте функции площадь фигуры, ограниченную графиком этой функции, осью абсцисс и прямыми $x = x_0$, $x = a$, где x_0 — ближайший к a корень функции ($x_0 < a$).

А

Функция	Площадь			
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$y = 2x,\ a = 1$				
$y = 3x^2,\ a = 1$				
$y = \sqrt{x},\ a = 1$				
$y = \sin x,\ a = \frac{\pi}{3}$				

Б

Функция	Площадь			
	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	1	2
$y = x^2 + x,\ a = 1$				
$y = \sin 2x,\ a = \frac{\pi}{2}$				
$y = x^3 + 1,\ a = 1$				
$y = \sqrt[3]{x-1},\ a = 2$				

В

Функция	Площадь			
	2π	3	1	9
$y = (0{,}25x + 1)^3,\ a = 0$				
$y = \sqrt{2x-1},\ a = 5$				
$y = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right),\ a = \frac{\pi}{6}$				
$y = 4\cos^2 x,\ a = \frac{\pi}{2}$				

Самостоятельные работы

А

10.12.

1) Найдите какую-нибудь первообразную для функции $y = x^2 - 2\sin(2x) + x^{-1}$.

2) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками $y = -x^2 + 1$, $y = 0$.

3) Вычислите объем тела, полученного путем вращения отрезка с концами (1; 0) и (1; 1) вокруг оси ординат.

Б

10.13.

1) Найдите какую-нибудь первообразную для функции $y = x^2 - 2e^{2x} + 3x^{-1}$.

2) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками $y = -x^2 + 1$, $y = x^2 - 1$.

3) Вычислите объем тела вращения, полученного путем вращения отрезка с концами (1; 0) и (0; 1) вокруг оси ординат.

В

10.14.

1) Найдите какую-нибудь первообразную для функции $y = x^2e^{x^3} - 2\sin(2x) + \dfrac{x}{(1+x)^2}$.

2) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками $y = -x^4 + 1$, $y = x^2 - 1$.

3) Вычислите объем тела, полученного вращением параболы $y = 2x^2$ от точки (0; 0) до точки (1; 2) вокруг оси ординат.

Контрольные тесты с выбором ответа

■ Первообразные ■ Площадь фигуры ■ Объем тела

■ Первообразные

10.15. Первообразной данной функции является следующая.

А

Для функции $x^3 - \sin x$

а	б	в	г
$3x^2 - \cos x$	$4x^4 + \sin x$	$0{,}25x^4 - \cos x$	$0{,}25x^4 + \cos x$

Б

Для функции $\dfrac{1}{x^2} - \sin(2x)$

а	б	в	г
$\frac{1}{x}-2\cos(2x)$	$-\frac{1}{x^3}-2\sin(2x)$	$-\frac{1}{x}+0{,}5\cos(2x)$	$-\frac{1}{x}+\cos(2x)$

В

Для функции $xe^{x^2}-\frac{1}{x}$

а	б	в	г
$0{,}5e^{x^2}+\ln x$	$0{,}5e^{x^2}-\ln x$	$0{,}5e^{x^2}+\frac{1}{x^2}$	$e^{x^2}-\ln x$

■ Площадь фигуры

10.16. Площадь фигуры, ограниченной данными графиками, равна следующему значению.

А

$y=x^2$, $y=1$

а	б	в	г
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$

Б

$y=\sin x$, $y=\pi^{-1}x^2-x$

а	б	в	г
$\frac{5}{6}\pi^2-2$	$2-\frac{5}{6}\pi^2$	$2-\frac{3}{4}\pi^2$	$2+\frac{\pi^2}{6}$

В

$y=\operatorname{tg} x$, $y=\frac{4}{\pi}x$

а	б	в	г
$0{,}5\pi-\ln 2$	$\ln\pi+2$	$2\ln\pi^2$	$0{,}25\pi-\ln 2$

Объем тела

10.17. Объем данного тела равен следующему значению.

А

Часть единичного шара с центром в начале координат, лежащая в I октанте.

а	б	в	г
$\frac{\pi^3}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$0{,}75\pi$	$0{,}75\pi^3$

Б

Часть единичного шара с центром в начале координат, не лежащая во вписанном в него кубе.

а	б	в	г
$\frac{3}{4}\pi - 3$	$3\pi - 1$	$\frac{4}{3}\pi - \frac{8\sqrt{3}}{9}$	$\frac{4}{3}\pi - 1$

В

Часть единичного шара, не принадлежащая вписанному в него тетраэдру.

а	б	в	г
$\frac{4}{3}\pi - \frac{8\sqrt{3}}{27}$	$\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{3}$	$3\pi - 1$	$\frac{4}{3}\pi + \frac{1}{3}$

ГЛАВА 11 Теория вероятностей

Тренажеры

■ Классическое определение вероятности ■ Повторные испытания ■ Геометрическая вероятность

■ Классическое определение вероятности

А

11.1. В урне 20 белых и 25 черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найдите вероятность того, что этот шар — белый.

11.2. В урне 10 белых и 26 черных шаров. Из урны вынимаются сразу два шара. Найдите вероятность того, что эти шары будут разных цветов.

11.3. Задумано двузначное число. Найдите вероятность того, что задуманным числом окажется:

а) случайно названное двузначное число;
б) случайно названное двузначное число, цифры которого различны.

11.4. Брошены две игральные кости. Найдите вероятности следующих событий:

а) сумма выпавших очков равна 6;
б) сумма выпавших очков равна 8, а разность 3.

11.5. В коробке шесть одинаковых, занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекаются все кубики. Найдите вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в убывающем порядке.

11.6. В конверте среди 100 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 17 карточек. Найдите вероятность того, что среди них окажется нужная.

11.7. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найдите вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

11.8. В классе 12 учеников, среди которых 5 отличников. По списку наудачу отобраны 9 учеников. Найдите вероятность того, что среди отобранных учеников три отличника.

11.9. В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них золотые. Наудачу извлечены два изделия. Найдите вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажется:

а) одно золотое изделие;

б) два золотых изделия;

в) хотя бы одно золотое изделие.

11.10. В «секретном» замке на общей оси четыре диска, каждый из них разделен на пять секторов, на которых написаны различные цифры. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры на них составляют определенное четырехзначное число. Найдите вероятность того, что при произвольной установке дисков замок будет открыт.

11.11. На карточках написаны целые числа от 1 до 15. Наудачу извлекаются две карточки. Какова вероятность того, что сумма цифр, написанных на этих карточках, будет равна 10?

11.12. В урне 10 белых и 25 черных шаров. Из урны вынимают сразу два шара. Найдите вероятность того, что оба шара будут белыми.

11.13. К концу дня в палатке осталось 70 арбузов, из которых 55 спелых. Покупатель выбирает два арбуза. Какова вероятность того, что оба выбранные арбуза спелые?

11.14. В ящике находится 15 деталей, 5 из которых окрашены. Наудачу извлекаются 5 деталей. Найдите вероятность того, что четыре из них окрашены, а одна — нет.

11.15. Имеется шесть билетов в театр, три из которых на места первого ряда. Какова вероятность того, что из трех наудачу выбранных билетов два окажутся на месте первого ряда?

Б

11.16. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найдите вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет окрашенных граней:

а) одну;
б) две;
в) три.

11.17. В первом ящике лежит 20 деталей, из них 13 стандартных; во втором — 30 деталей (26 стандартных); в третьем — 10 деталей (7 стандартных). Найдите вероятность того, что наугад извлеченная деталь из наудачу взятого ящика стандартная.

11.18. В денежно-вещевой лотерее на каждые 10 тыс. билетов разыгрывается 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Чему равна вероятность выигрыша, безразлично денежного или вещевого, для владельца одного лотерейного билета?

11.19. На девяти карточках написаны цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Наугад вынимают две карточки и укладывают на стол в порядке появления, затем читают полученное число, например 7 (семь), 14 (четырнадцать) и т. п. Найдите вероятность того, что число на карточке будет четным.

11.20. В урне 10 белых и 25 черных шаров. Из урны вынимают один шар, отмечают его цвет и возвращают в урну. После этого из урны берут еще один шар. Найдите вероятность того, что оба вынутых шара будут белыми.

11.21. Брошены две игральные кости. Найдите вероятности следующих событий:

а) сумма выпавших очков равна семи, а их разность равна четырем;
б) сумма выпавших очков равна пяти, а произведение — четырем.

11.22. Из полного набора 28 костей домино наудачу извлечена одна кость. Найдите вероятность того, что вторую извлеченную кость можно приставить к первой.

11.23. На разные клетки шахматной доски произвольным образом поставили две ладьи (белую и черную). Что вероятнее: окажутся ладьи под ударом друг друга или нет?

11.24. В урне 10 белых, 5 черных, 2 красных шаров. Наудачу вынимается три шара. Какова вероятность того, что все они будут разного цвета?

11.25. В экзаменационный билет входит 4 вопроса программы, насчитывающей 45 вопросов. Абитуриент не знает ответа на 15 вопросов программы. Какова вероятность того, что он вытянет билет, где все вопросы ему известны?

11.26. Имеется две урны: в первой 10 белых и 27 черных шаров; во второй 25 белых и 10 черных. Из каждой урны вынимается по шару. Найдите вероятность того, что оба шара будут белыми.

11.27. Два охотника одновременно увидели лису и одновременно выстрелили в нее. Предположим, что каждый из охотников на таком расстоянии обычно в одном случае из пяти попадает в лису и убивает ее. Какова вероятность того, что лиса будет убита?

11.28. В лотерее разыгрывается n билетов, из которых l выигрышных. Некто покупает r билетов. Какова вероятность того, что хотя бы один из купленных билетов выигрышный?

В

11.29. В соревнованиях по футболу участвуют 20 команд. Случайным образом они делятся на две группы по 10 команд. Какова вероятность того, что две наиболее сильные команды при этом окажутся в одной группе?

11.30. На один ряд, состоящий из семи мест, случайным образом садятся семь учеников. Найдите вероятность того, что три определенных ученика окажутся рядом.

11.31. Пусть n девочек и n мальчиков рассаживаются случайным образом в ряду из $2n$ мест. Какова вероятность того, что никакие две девочки не окажутся рядом? Чему равна вероятность того, что все девочки будут сидеть рядом?

11.32. В урне 12 белых и 24 черных шаров. Из урны в случайном порядке, один за другим, вынимают все находящиеся в ней шары. Найдите вероятность того, что вторым по порядку будет вынут белый шар.

11.33. Из колоды карт (52 карты) Германн (опера П. И. Чайковского «Пиковая дама») наугад извлекает три карты. Найдите вероятность того, что это будет тройка, семерка и туз произвольной масти.

11.34. Десять пассажиров случайным образом размещаются в трех вагонах (при этом возможно, что в один или два вагона никто не сел). Какова вероятность того, что в какой-нибудь из вагонов сядет шесть человек, в другой — три человека и в третий — один человек?

Повторные испытания

А

11.35. Монета брошена два раза. Найдите вероятность того, что хотя бы один раз появится«герб».

11.36. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет в мишень, равна $p = 0{,}9$. Стрелок произвел четыре выстрела. Найдите вероятность того, что все выстрелы попали в цель.

11.37. Радист трижды вызывает корреспондента, причем последующий вызов производится при условии, что предыдущий вызов не принят. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,3; второй — 0,4 и третий — 0,5. Найдите вероятность вызова корреспондента.

11.38. На стеллаже 15 учебников, пять из них в переплете. Наудачу выбираются три учебника. Какова вероятность того, что хотя бы один из них будет в переплете?

11.39. Монету бросают три раза. Какое из событий более вероятно: событие A — все три раза выпала цифра или событие B — два раза выпала цифра и один раз герб? Подсчитайте вероятность этих событий.

Б

11.40. Два стрелка произвели по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,7; вторым — 0,6. Найдите вероятность того, что хотя бы один из стрелков попал в мишень.

11.41. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей шесть очков появится хотя бы на одной из костей?

В

11.42. По линии связи, имеющей четыре приемо-передающих пункта, передается сообщение. На первом пункте происходит искажение сообщения с вероятностью 0,1. На каждом последующем пункте вероятность искажения возрастает на 0,05. Какова вероятность получения неискаженного сигнала?

11.43. Два баскетболиста независимо друг от друга производят по четыре броска мячом в корзину. Вероятности попадания мяча в корзину соответственно равны 0,7 и 0,4. Определите вероятность того, что:

а) у обоих баскетболистов будет равное количество попаданий;
б) у первого баскетболиста будет больше попаданий.

11.44. Известно, что при 10-кратном бросании монеты пять раз выпал герб и пять раз — цифры. Какова вероятность того, что все гербы выпали при первых пяти бросаниях?

11.45. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в десятку, равна 0,6. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,8 он попал в десятку хотя бы один раз?

11.46. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно, равна 0,1. Найдите вероятность того, что:

а) из трех проверенных изделий только одно окажется нестандартным;
б) нестандартным окажется только четвертое по порядку проверенное изделие.

11.47. Монета бросается до тех пор, пока два раза подряд она не выпадает одной и той же стороной. Найдите вероятности следующих событий:

а) A — понадобится меньше шести бросаний;
б) B — потребуется четное число бросаний.

11.48. Вероятность наступления после ясного дня вновь ясного дня равна p_1, а пасмурного — $(1 - p_1)$. Вероятность наступления после пасмурного дня снова пасмурного дня равна p_2, а ясного — $(1 - p_2)$. Сегодня ясно. Какова вероятность того, что послезавтра будет:

а) A — ясно;
б) B — пасмурно?

Геометрическая вероятность

А

11.49. Два действительных числа x и y выбираются наудачу так, что $|x| \le 1$ и $|y| \le 1$. Какова вероятность того, что $|x| < |y|$?

Б

11.50. Два действительных числа x и y выбираются наудачу так, что $|x| \le 3$, $|y| \le 5$. Какова вероятность того, что дробь $\dfrac{x}{y}$ окажется положительной?

11.51. Наудачу взяты два положительных числа x и y, не превышающие единицы. Какова вероятность того, что сумма их не превышает единицы, а сумма их квадратов больше $\dfrac{1}{4}$?

11.52. Два действительных числа x и y выбираются наудачу так, что $|x| \le 1$, $0 \le y \le 1$. Какова вероятность того, что $x^2 < y$?

В

11.53. В течение 20 мин ученик А в случайный момент звонит по телефону ученику В и ждет 2 мин, после чего кладет трубку. В течение тех же 20 мин в случайный момент времени ученик В приходит домой, где остается в течение 5 мин, после чего уходит. Какова вероятность того, что разговор состоится?

Матричные тесты

■ Классическое определение вероятности ■ Повторение испытаний ■ Геометрическая вероятность

■ Классическое определение вероятности

A

11.54. Спасаясь от охотников, 10 кроликов разбежались независимо друг от друга в три разные норы. В каком из интервалов лежит вероятность указанного события?

Событие	Вероятность				
	[0; 0,3)	[0,2; 0,4)	[0,4; 0,6)	[0,6; 0,8)	[0,8; 1]
Нет пустых нор					
В первой норе три кролика					
Ровно одна нора пуста					
В одной норе четыре кролика, в остальных — поровну					
В одной норе два кролика, в остальных — поровну					

11.55. Шесть разных цветков случайным образом помещаются в две различные вазы. Найдите вероятности следующих событий.

Событие	Вероятность			
	$\frac{3}{16}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{32}$
Одна из ваз пустая				
В одной из ваз один цветок				
В одной из ваз два цветка				
В обеих вазах четное число цветков				

11.56. Чтобы вскрыть сейф, нужно набрать в определенном порядке четыре верные цифры из 10 возможных (цифры могут повторяться).

Какова вероятность открыть замок при случайном наборе, если даны следующие сведения о коде.

Сведения о коде	Вероятность			
	$\frac{1}{2\,000}$	$\frac{1}{5\,040}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{1\,000}$
Делится на 5				
Содержит только 2 и 3				
Начинается с 0				
Не содержит одинаковых цифр				

Б

11.57. Девять цветков случайным образом помещаются в три вазы. Найдите вероятности следующих событий, если цветки одинаковые, а вазы различны.

Событие	Вероятность			
	$\frac{2}{11}$	$\frac{9}{55}$	$\frac{1}{55}$	$\frac{3}{11}$
Первая ваза пустая				
В каждой вазе три цветка				
Хотя бы в одной вазе четыре цветка				
Во всех вазах нечетное число цветков				

11.58. Чтобы открыть кодовый замок, нужно набрать четыре верные цифры из 10 возможных, причем цифры в коде не повторяются, а порядок их набора не имеет значения. Какова вероятность открыть замок при случайном наборе, если даны следующие сведения о коде.

Сведения о коде	Вероятность			
	$\frac{1}{84}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{70}$
Содержится цифра 5				
Только нечетные цифры				
Сумма цифр равна 29				

Окончание таблицы

Сведения о коде	Вероятность			
	$\frac{1}{84}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{70}$
Из цифр можно составить арифметическую прогрессию				

В

11.59. Пять цветков случайным образом помещаются в три вазы. Найдите вероятности следующих событий, если цветки различные, а вазы одинаковые.

Событие	Вероятность			
	$\frac{5}{22}$	$\frac{20}{33}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{35}{66}$
Только одна из ваз пустая				
В одной из ваз один цветок				
Хотя бы в одной из ваз два цветка				
В одной из ваз три цветка				

Повторение испытаний

А

11.60. Два шахматиста сыграли матч из шести партий. Вероятность ничьи в отдельной партии равна 0,2. Найдите вероятность следующих событий.

Событие	Вероятность			
	$\frac{1}{125}$	$\frac{256}{3125}$	$\frac{11529}{15625}$	$\frac{256}{15625}$
Ничьи только в первой и шестой партиях				
Хотя бы одна ничья в шести партиях				
Ровно три ничьи				
Три ничьи в первых трех партиях				

Б

11.61. Два шахматиста играют до первой ничьи, но не более шести партий. Вероятность ничьи в отдельной партии равна 0,4. Найдите вероятности следующих событий.

Событие	Вероятность			
	$\frac{544}{625}$	$\frac{54}{625}$	$\frac{243}{3125}$	$\frac{486}{15625}$
Шахматисты сыграли ровно четыре партии				
Шахматисты сыграли не более четырех партий				
Шахматисты сыграли шесть партий				
Ничья в шестой партии				

В

11.62. Игральная кость бросается четыре раза. Найдите вероятность следующих событий.

Событие	Вероятность			
	$\frac{19}{144}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{5}{12}$
Сумма очков нечетна				
Два раза из четырех выпало одинаковое число очков				
Два раза из трех выпало одинаковое число очков				
Произведение числа очков делится на 25				

Геометрическая вероятность

А

11.63. Область D на плоскости (x, y) задана системой неравенств
$$\begin{cases} 3x+2y \le 6; \\ x \ge 0, y \ge 0. \end{cases}$$

Точка (x, y) выбирается в D случайным образом. Определите вероятность следующих событий.

Событие	Вероятность			
	1	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{2}{3}$
$x = y$				
$x \le y$				
$x^2 + y \le 4$				
$\begin{cases} x \ge 1; \\ y \ge 1 \end{cases}$				

Б

11.64. Область D на плоскости (x, y) задана неравенствами $x^2 \le$ $\le y \le 4$.

Точка (x, y) выбирается в D случайным образом. Определите вероятность следующих событий.

Событие	Вероятность			
	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0
$\lvert x\rvert \ge 1$				
$y \le 2 - x^2$				
$y = 4$				
$y \ge 2\lvert x\rvert$				

В

11.65. Область D на плоскости (x, y) задана неравенствами $0 \le$ $\le y \le \cos x$, $\lvert x\rvert \le \frac{\pi}{2}$.

Точка (x, y) выбирается в D случайным образом. Определите вероятность следующих событий.

Событие	Вероятность			
	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$1-\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\lvert x\rvert \geq \frac{\pi}{6}$				
$x^2+y^2 \leq 1$				
$y \leq \frac{1}{2}\cos 2x$				
$y \geq \cos^2 x$				

Самостоятельные работы

■ Вычисление вероятности ■ Геометрическая вероятность

■ Вычисление вероятности

A

11.66.

Вариант 1

1) В русском алфавите 20 согласных и 10 гласных букв. Какова вероятность того, что в наугад составленном двухбуквенном слове первая буква будет согласной, а вторая — гласной?
2) Известно, что число в двоичной системе счисления состоит из семи цифр. Какова вероятность того, что это число в десятичной записи равно 89?

Вариант 2

1) Какова вероятность того, что в наугад выбранном двузначном числе в десятичной записи не содержится цифр 0, 5 и 9?

2) Вероятность взятия вратарем 11-метрового штрафного удара равна $\frac{1}{4}$. Какова вероятность того, что он возьмет хотя бы один мяч из четырех?

Б

11.67.

Вариант 1

1) Какова вероятность того, что наугад взятое пятизначное число оканчивается двумя семерками?
2) В старинной индейской игре Тонг два игрока одновременно показывают друг другу либо один, либо два, либо три пальца на правой руке. Какова вероятность того, что общее число показанных пальцев больше четырех, если все варианты являются равновозможными?

Вариант 2

1) Какова вероятность того, что наугад взятое пятизначное число начинается двумя семерками?
2) В старинной индейской игре Тонг два игрока одновременно показывают друг другу либо один, либо два, либо три пальца на правой руке. Какова вероятность того, что общее число показанных пальцев меньше четырех, если все варианты являются равновозможными?

В

11.68.

Вариант 1

1) Школьник должен определить дату каждого из трех исторических событий, пользуясь списком из трех различных дат. Не зная правильного ответа, он подбирает даты наугад. Какова вероятность того, что он правильно подберет:
а) дату только одного события;
б) даты двух событий?
2) Игрок бросает две кости. Если на них выпадает в сумме 7 или 11 очков, то он выигрывает, если 2, 3 или 12 очков, то он проигрывает. В остальных случаях он получает право бросить кость еще раз. Какова вероятность того, что игрок выиграет:

а) с первого раза;
б) со второго раза?

Вариант 2

1) Школьник должен определить дату каждого из четырех исторических событий, пользуясь списком из четырех различных дат. Не зная правильного ответа, он подбирает даты наугад. Какова вероятность того, что он правильно подберет:
а) даты двух событий;
б) даты трех событий?

2) Игрок бросает две кости. Если на них выпадает в сумме 6 или 10 очков, то он выигрывает, если 3, 5 или 11 очков, то он проигрывает. В остальных случаях он получает право бросить кости еще раз. Какова вероятность того, что игрок выиграет:
а) с первого раза;
б) со второго раза?

Геометрическая вероятность

А

11.69.

Вариант 1

Наудачу взяты два положительных числа x и y, такие что $1 \le x \le 2$ и $1 \le y \le 3$. Какова вероятность того, что наугад взятое число $x > y$?

Вариант 2

Стрелок производит один выстрел по круглой мишени. Предположим, что в какую-то точку мишени пуля обязательно попадет и при этом все точки равноправны. Проведем хорду, равную радиусу мишени. Какова вероятность того, что стрелок попадет в мишень?

Б

11.70.

Вариант 1

Какова вероятность того, что координаты наугад выбранной точки на плоскости лежат выше параболы $y = 2x^2$, если известно, что $|x| \le 1$, а $|y| \le 2$?

Вариант 2

Какова вероятность того, что координаты наугад выбранной точки на плоскости лежат ниже параболы $y = 3x^2$, если известно, что $|x| \le 1$, а $|y| < 3$?

В

11.71.

Вариант 1

Какова вероятность того, что наугад выбранная точка внутри квадрата со сторонами, равными 2, и центром в начале координат окажется между параболами $y = x^2 - 1$ и $y = -x^2 + 1$?

Вариант 2

Какова вероятность того, что наугад выбранная точка внутри прямоугольника размером 4×8 и центром в начале координат окажется между параболами $y = x^2 - 4$ и $y = -x^2 + 4$?

Контрольные тесты с выбором ответа

А

11.72. Брошена игральная кость. Вероятность того, что выпадет четное число очков, равна следующему значению:

а	б	в	г
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

11.73. Монета бросается до тех пор, пока два раза подряд она не выпадет одной и той же стороной. Вероятность того, что опыт закончится до шестого бросания, равна следующему значению:

а	б	в	г
$\frac{9}{10}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{32}$

Б

11.74. Два действительных числа x и y выбираются наудачу так, что $|x| \le 1$ и $|y| \le 1$. Вероятность того, что $|x| \le |y|$, равна следующему значению:

а	б	в	г
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0,4

11.75. Восемь различных книг расставляются наудачу на одной полке. Вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом, равна следующему значению:

а	б	в	г
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{7}$

11.76. К концу дня в палатке осталось 60 арбузов, из которых 50 спелых. Покупатель выбирает два арбуза. Вероятность того, что оба выбранных арбуза спелые, равна следующему значению:

а	б	в	г
$\frac{254}{357}$	$\frac{245}{354}$	$\frac{260}{361}$	$\frac{255}{364}$

11.77. Внутрь круга радиуса 1 наудачу брошена точка. Вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг правильного треугольника, равна следующему значению:

а	б	в	г
$\frac{2\sqrt{2}}{5\pi}$	$\frac{4\sqrt{3}}{5\pi}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$	$\frac{\sqrt{6}}{\pi}$

В

11.78. Каждый из четырех человек говорит правду один раз из трех. Человек А сказал следующую фразу: «D говорит, что C говорит, что B говорит, что A сказал правду». Чему равна вероятность того, что человек A сказал правду?

а	б	в	г
$\frac{1}{3}$	$\frac{26}{81}$	$\frac{41}{81}$	$\frac{13}{41}$

11.79. Из полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Вероятность того, что вторую наудачу извлеченную кость можно приставить к первой, равна следующему значению:

а	б	в	г
$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$

11.80. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет три окрашенные грани, равна следующему значению:

а	б	в	г
$\frac{1}{125}$	0,007	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{144}$

ГЛАВА 12

Уравнения и неравенства

Тренажеры

■ Область определения ■ Разложение на множители ■ Замена переменной ■ Решение уравнений ■ Решение неравенств ■ Решение систем уравнений

■ Область определения

12.1. Определите, при каких значениях x имеет смысл выражение.

А

1) $\frac{x}{x+1}+\frac{x-1}{x}$; 2) $\sqrt{x+3}+\sqrt{-x}$; 3) $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{\sqrt{1-x}}$; 4) $\frac{\sqrt{5-3x}}{\sqrt{2x+4}}$;

5) $\sqrt{\frac{x(x-5)}{7-x}}$; 6) $\ln(5-x^2)+\frac{1}{x}$; 7) $\frac{1}{\ln(1+x)}$; 8) $\frac{2+\sqrt{x}}{\ln x-1}$;

9) $\sqrt{\sin x}-3x$; 10) $\sqrt{\ln x-2}$; 11) $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x$;

12) $\frac{1}{2\sin x-1}+\frac{1}{2\cos x-1}$.

Б

1) $\frac{10}{x^2+x-2}+\frac{x+1}{x^2-x-2}$; 2) $\frac{\sqrt{x}\sqrt{x-5}}{\sqrt{7-x}}$; 3) $\sqrt{1-x}-\sqrt{x^2-1}$;

4) $\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{1+2x+x^2}}$; 5) $\frac{\sqrt{x-3}}{|x|-5}-2x^2$; 6) $\sqrt{|x|-2}+\frac{1}{|x-6|}$;

7) $\sqrt{x^2-5|x|+6}-3x$; 8) $\sqrt{\ln^2 x-4}+5$; 9) $\sqrt{\sin x+\frac{1}{2}-x^3}$;

10) $\sqrt{\frac{1}{2}-\sin x+\frac{1}{x}}$; 11) $\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x-1}}$; 12) $\ln\ln\ln x$.

В

1) $\frac{\sqrt{8-x}\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}\sqrt{x+4}}+\operatorname{tg}x$; 2) $\sqrt{x^2-2\sqrt{x}}$; 3) $\sqrt{2+\ln x-\ln^2 x}-3\operatorname{ctg}x$;

4) $\sqrt{\sin^2 x-\frac{1}{4}}$; 5) $\frac{1}{\ln(\ln(\ln x))}$; 6) $\sqrt{\ln\sqrt{\lg x}}$; 7) $\ln(|x|-x)+\frac{1}{2x^2-3}$;

8) $\sqrt{1-\sqrt{\ln x-1}}$; 9) $\frac{1}{2-\sqrt{3-\sqrt{x-1}}}$; 10) $\frac{\sqrt{16-x^2}}{\operatorname{tg}x-1}$;

11) $\sqrt{\ln x\ln(2-x)}$.

■ Разложение на множители

12.2. Решите уравнения и неравенства, используя разложение многочленов на множители.

А

1) $x^3+3x^2=0$; 2) $x^5-x=0$; 3) $x^3-x^2-x+1=0$;
4) $x^3-x^2+x-1=0$; 5) $x^4-16=0$; 6) $x^4+x^3-4x^2-4x=0$;
7) $x^4-(x-2)^2=0$; 8) $x^3+2x^2-x-2=0$; 9) $4x^4-9x^2+2\le 0$;
10) $2-x^2-x\ge 0$; 11) $x^2-5x+6>0$; 12) $\frac{x^2-4}{x+5}\ge 0$;
13) $\frac{x^2+2x-3}{x+7}<0$; 14) $\frac{x^2-4x}{x^2+4x-32}<0$; 15) $\frac{x+3}{x^2+4x-5}\ge 0$.

Б

1) $x^3+\frac{1}{x^3}=5\left(x+\frac{1}{x}\right)$; 2) $x^4+4x^3-x^2-16x-12=0$;
3) $x^4+5x^3+4x^2-24x-24=0$; 4) $x^3-6x^2+11x-6=0$;
5) $4x^4+4x^3-9x^2-x+2=0$; 6) $x^4-5x^3+7x^2-5x+6=0$;
7) $2x^3-x^2-7x+6=0$; 8) $x^4+x^3+x^2+3x-6=0$;
9) $|x^2-2x-8|>2x$; 10) $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\le\frac{1}{x+2}$; 11) $\frac{x^2-4x-5}{x^2+3x+2}\le 0$.

В

1) $(x-1)^3+(2x+3)^3=27x^3+8$; 2) $4x^3+3x-2=0$;

3) $(x^2-x-1)^2-x^3=5$; 4) $x^4+5x^2(x+1)=6(x+1)^2$;

5) $18x^4-3x^3-25x^2+2x+8=0$; 6) $x^4+x^3+4x^2+5x-5=0$;

7) $(x^2-1)^3\cdot(x^2-x-2)^5\le 0$; 8) $\dfrac{(x-5)^2(x^2-3x-10)^3}{(x^2+2x-15)(x^2-2x-3)}\le 0$;

9) $\dfrac{(x^2+x-6)^2(x^2+2x-8)^3}{(x^2+7x+12)^5}\le 0$; 10) $(x^2-1)\ln(2-x)(e^{x+1}-1)\ge 0$;

11) $(x^2-5x+6)^3(|x|-2)\ln^2(x-3)<0$; 12) $\dfrac{e^{2x}-5e^x+6}{(1-x)^9}\ge 0$.

Замена переменной

12.3. Решите уравнение.

А

1) $x^2+\dfrac{3}{x^2}-4=0$; 2) $x^4-\dfrac{50}{2x^4-7}=14$; 3) $\dfrac{1}{x^3+2}-\dfrac{1}{x^3+3}=\dfrac{1}{12}$;

4) $4^x-10\cdot 2^x=24$; 5) $5^x-24=\dfrac{25}{5^x}$; 6) $2^{2x+1}-33\cdot 2^{x-1}+4=0$;

7) $(\log_2 4x-2)=\dfrac{3}{2}(\log_2 4x-1)$; 8) $\sqrt{x^2+32}-2\sqrt[4]{x^2+32}=3$;

9) $x^2+x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=4$; 10) $4^{x^2+2x}-9\cdot 2^{x^2+2x+1}+32=0$.

Б

1) $3x^2+21x+34+\sqrt{x^2+7x+16}=0$; 2) $\dfrac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-4}}-2\dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+4}}=\dfrac{7}{3}$;

3) $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}$; 4) $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$;

5) $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55$; 6) $\dfrac{x^2+x-5}{x}+\dfrac{3x}{x^2+x-5}+4=0$;

7) $\log_x 2-\log_4 x+\dfrac{7}{6}=0$; 8) $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)=297$;

9) $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$;

10) $64^{\frac{1}{x}}-2^{3+\frac{3}{x}}+12=0$.

В

1) $(x+3)^4+(x+5)^4=16$; 2) $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$;

3) $4x^4+3x^3-14x^2+3x+4=0$; 4) $9^x=6^x+4^{x+\frac{1}{2}}$;

5) $\log_2{}^2(x-1)^2=5+\log_{0,5}(x-1)$; 6) $8^x+18^x=2\cdot 27^x$;

7) $x(x^2+1)=-6x^2+(x^2+1)^2$; 8) $x^2+x\sqrt{x-3}+x-3=0$.

Решение уравнений

Рациональные уравнения

12.4. Решите уравнение.

А

1) $\frac{27}{x+5}+\frac{1}{x-5}=2$; 2) $x^8-17x^4+16=0$;

3) $(x^2+5x)^2-2(x^2+5x)-24=0$; 4) $(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24=0$;

5) $x^4+x^3-12x^2=0$; 6) $x^3-x^2-\frac{8}{x^3-x^2}=2$;

7) $\frac{4}{x^2+4}+\frac{5}{x^2+5}=2$; 8) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=\frac{29}{10}$;

9) $\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2$; 10) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=-\frac{5}{2}$.

Б

1) $\frac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$; 2) $\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}$;

3) $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$; 4) $x^2+2x+\frac{1}{x+1}=\frac{x^2+x+1}{x+1}$;

5) $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}$; 6) $3\left(x+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$;

7) $10x^2(x-2)^2=9(x^2+(x-2)^2)$; 8) $\frac{x^2+1}{3x^2-2x}=2x$;

9) $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1\,680$; 10) $\frac{x-1}{x}-\frac{3x}{2x-2}=-\frac{5}{2}$.

В

1) $4x^2+12x+\dfrac{12}{x}+\dfrac{4}{x^2}=47$; 2) $\dfrac{\left(x^2+1\right)^2}{x(x+1)^2}=\dfrac{625}{112}$;

3) $x^3-x^2-14x+24=0$; 4) $(x-2)^4+(x+1)^4=17$;

5) $\dfrac{(x-1)^2x}{\left(x^2-x+1\right)^2}=\dfrac{2}{9}$; 6) $\dfrac{x}{x^2+7x+1}=\dfrac{x^2+8x+1}{x^2+6x+1}$;

7) $(x^2-6x-9)^2=x^3-4x^2-9x$; 8) $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}=1$.

□ Иррациональные уравнения

12.5. Решите уравнение.

А

1) $\sqrt{x}=2-x$; 2) $x-\sqrt{x+1}=1$; 3) $\left(x^2-9\right)\sqrt{2-x}=0$;

4) $\left(x^2-4\right)\sqrt{x+5}=0$; 5) $x-1=\sqrt{x+5}$; 6) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-1}$;

7) $\sqrt{5x-5}+\sqrt{10x-5}=\sqrt{15x-10}$; 8) $\sqrt{6x+1}-\sqrt{x-3}=\sqrt{3x+4}$;

9) $\sqrt{x}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3(x-1)}$;

10) $\sqrt{x^2+3x+3}+\sqrt{x^2+3x-1}=\sqrt{2x^2+6x+2}$;

11) $\sqrt{8-2x+x^2}=\sqrt{x^2+2}+\sqrt{6-2x}$; 12) $2\cdot\sqrt[3]{x}+5\cdot\sqrt[6]{x}-18=0$;

13) $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6$; 14) $x^2+\sqrt{x^2+20}=22$;

15) $x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x$.

Б

1) $x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0$;

2) $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$; 3) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=\dfrac{3}{2}$;

4) $\dfrac{x}{x+1}-2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}=3$; 5) $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+2x+1}=\sqrt{x^2+4x+4}$;

6) $\sqrt{x-7}-\dfrac{21}{\sqrt{x-7}}+\sqrt{2x}=0$; 7) $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$;

8) $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\dfrac{\sqrt{3}}{x}$.

В

1) $3(x^2 - x + 1) = \left(x + \sqrt{x-1}\right)^2$; 2) $x^3 + x + \sqrt[3]{x^3 + x - 2} = 12$;

3) $6x^2 + 7x\sqrt{1+x} = 24(1+x)$; 4) $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{2x-3} = 0$;

5) $x^2 - 4x + 32 = 16\sqrt{x}$; 6) $\sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = 1$;

7) $\dfrac{25-9x}{3} + \left(\sqrt{3x-2} - 3\right)\left(\sqrt{3x-2} + 1\right) = 2$;

8) $\sqrt{\dfrac{18-7x-x^2}{8-6x+x^2}} + \sqrt{\dfrac{8-6x+x^2}{18-7x-x^2}} = \dfrac{13}{6}$; 9) $x - 2\sqrt{x\sqrt{x-1}+2} + 2 = 0$.

□ Логарифмические и показательные уравнения

12.6. Решите уравнение.

А

1) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{3x-1} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^{2x-9}$; 2) $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$;

3) $2^{x^2+x-6} - 2^{x^2+x-9} = 56$; 4) $25^x - 6\cdot 5^x + 5 = 0$;

5) $9^{x^2-1} - 36\cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$; 6) $9^{x+1} - 3\cdot 3^{x+3} - 27\cdot 3^{x-2} + 27 = 0$;

7) $\dfrac{15}{3^x - 2} = 3^x$; 8) $\dfrac{2^x + 10}{4} = \dfrac{9}{2^{x-2}}$; 9) $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$;

10) $\ln(3x-5) = 0$; 11) $2\log_{0,5}x = \log_{0,5}(2x^2 - x)$;

12) $\log_2(4-x) + \log_2(1-2x) = 2\log_2 3$;

13) $\ln(x^2 - 6x + 9) = \ln 3 + \ln(x+3)$; 14) $2\log_3^2 x - 7\log_3 x + 3 = 0$;

15) $\dfrac{3\lg x + 19}{3\lg x - 1} = 2\lg x + 1$.

Б

1) $(0,5)^{x^2}\cdot 2^{2x+2} = \dfrac{1}{64}$; 2) $4^{-x+\frac{1}{2}} - 7\cdot 2^{-x} = 4$; 3) $\log_x 2 - \log_4 x + \dfrac{7}{6} = 0$;

4) $2\lg^2 x + \lg x^2 = 2\sqrt{2} + \sqrt{2}\lg x^2$; 5) $\log_{x+1}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) = \log_{x-\frac{1}{2}}(x+1)$;

6) $x^{\lg 1000x} = \dfrac{1}{100}$; 7) $x^{\lg^3 x - 5\lg x} = 0{,}0001$; 8) $x^{\lg x} = 1\,000$.

В

1) $\dfrac{\lg(17-x^2)}{\lg(5-x)} = 3$; 2) $\log_x(125x)\log_{25}^2 x = 1$;

3) $3^{2x^2-6x+3}+6^{x^2-3x+1}=2^{2x^2-6x+3}$; 4) $\left(6-\sqrt{35}\right)^x+\left(6+\sqrt{35}\right)^x=142$;

5) $3^{x-3}=5^{x^2-7x+12}$; 6) $3\sqrt{\log_3 x}-\log_3(3x)=1$; 7) $5^{3\lg x}=\dfrac{25}{2}x$;

8) $16^{\frac{x-1}{x}}\cdot 5^x=100$; 9) $\log_2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{\log_2 x}=\dfrac{4}{3}$; 10) $x^{\log_2(x+1)^2}=9$.

☐ Тригонометрические уравнения

12.7. Решите уравнение пп. 1 — 5. В ответе укажите корни (в градусах), расположенные на заданном промежутке.

А

1) $\cos\dfrac{x}{3}=-\dfrac{1}{2}$, $x\in[-360°;\ 0)$; 2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)=-\dfrac{1}{2}$, $x\in[0;\ 90°]$;

3) $2\sin^2 2x-1=0$, $x\in(0;\ 45°)$;

4) $\sin 2x=(\cos x-\sin x)^2$, $x\in(0;\ 45°)$;

5) $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1$, $x\in[0;\ 90°]$; 6) $\sin x+\cos 2x+2=0$;

7) $\sin x+\sin 2x=\operatorname{tg}x$; 8) $2\cos x(\cos x-\sqrt{8}\operatorname{tg}x)=0$; 9) $\sin x\sin 3x=\dfrac{1}{2}$;

10) $\cos 2x-3\cos x=4\cos^2\dfrac{x}{2}$; 11) $\dfrac{\sin x}{1-\cos x}=1+\cos x$;

12) $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}3x=1$; 13) $3\sin^2 2x+7\cos 2x-3=0$;

14) $\sqrt{1+2\sin x}+\cos x=0$; 15) $\sin 2x=\cos^4\dfrac{x}{2}-\sin^4\dfrac{x}{2}$;

16) $1-\sin 3x=\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)^2$.

Б

1) $1+\dfrac{\cos 2x}{\sin x}=\dfrac{1+\cos 2x\sin x}{\sin x}$; 2) $1+\operatorname{tg}2x=\dfrac{1-\sin 2x}{\cos^2 2x}$;

3) $(1-\sin 2x)(1-\operatorname{tg}x)=\dfrac{1}{\cos x}-2\sin x$;

4) $2\sin^2 3x+\sqrt{3}\sin 6x-1=2\cos 3x$; 5) $\cos^3 x\sin x-\sin^3 x\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$;

6) $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=\dfrac{3}{2}$; 7) $\sin 2x-\dfrac{\sin 4x}{4\cos^2 x}=1$;

8) $\sin^4 3x-\sin^4\left(\dfrac{\pi}{4}+3x\right)=0$; 9) $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{4}+\operatorname{ctg}\dfrac{3x}{4}=2\ \text{in}x$.

В

1) $(1+\cos 4x)\sin 2x = \cos^2 2x$; 2) $1 + 2\cos 3x\cos x - \cos 2x = 0$;

3) $4\sin^3 x\cos 3x + 4\cos^3 x\sin 3x = 3\sin 2x$;

4) $\sin 3x + \sin^3 x = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\sin 2x$; 5) $4\cos x - 2\cos 2x - \cos 4x = 1$;

6) $3(\cos x - \sin x) = 1 + \cos 2x - \sin 2x$;

7) $\sin x\sin 3x + \sin 4x\sin 8x = 0$; 8) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$;

9) $\sin^3\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin x$.

■ Решение неравенств

□ Рациональные неравенства

12.8. Решите неравенство.

А

1) $\dfrac{(5-2x)(x+3)}{(2x-7)(6-5x)} \le 0$; 2) $\dfrac{3}{(1-x)(2-x)} \ge 0$; 3) $\dfrac{x}{(3x+1)(3x-1)} < 0$;

4) $\dfrac{-2}{(x-1)(x-2)(3-x)} \le 0$; 5) $\dfrac{(x+1)(x^2+1)}{(2x-1)(x^2+x+1)} \ge 0$;

6) $\dfrac{9-x^2}{4x^4-25} \ge 0$; 7) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{x+2} < 0$; 8) $\dfrac{x}{x+1} \le 2$; 9) $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x} \le \dfrac{13}{6}$;

10) $\dfrac{x^3(x-3)}{(x+1)^2} > 0$.

Б

1) $x(x-1) - \dfrac{(x-4)^2}{4} > \dfrac{5x+4}{2}$; 2) $|5x+1| - |2x-4| \ge 3$;

3) $x^2 + |5x-4| - 1 \le |3x-2|$; 4) $\dfrac{1}{2-x} + \dfrac{5}{2+x} < 1$; 5) $\left|\dfrac{2x-3}{x+1}\right| < 1$;

6) $\dfrac{x}{(x-1)^2} \le 1$; 7) $\dfrac{(x+2)^3}{x} < 9(x+2)$; 8) $\dfrac{x^3-8}{x^3-1} \le \dfrac{x-2}{x-1}$;

9) $x^4 - 5x^2 + 4 \ge 0$; 10) $(x^2+x+1)^2 < 5x^2 + 5x - 1$.

В

1) $x^2 + 2|x-1| + 7 \le 4|x-2|$; 2) $|x^2 - 6x + 8| > x^2 - 6x + 8$;

3) $\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-4x+3} > -3$; 4) $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x+1} > 0$;

5) $x(x+1)(x+2)(x+3) \le 24$; 6) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} \ge 1{,}7\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$;

7) $\dfrac{1}{x^2+2x-3} \ge \dfrac{1}{2x+1}$; 8) $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3) \ge 5$;

9) $x^2 + \dfrac{4x^2}{(x+2)^2} < 5$; 10) $2x^2 + 2x + 1 - \dfrac{15}{x^2+x+1} < 0$.

□ Иррациональные неравенства

12.9. Решите неравенство.

А

1) $\sqrt{2x+7} \le x+2$; 2) $\sqrt{x+4} \ge x-2$; 3) $\sqrt{x+9} > x-3$;

4) $x + 8 \ge 6\sqrt{x-1}$; 5) $x < \sqrt{2-x}$; 6) $x + 1 > \sqrt{2+x}$; 7) $\sqrt{(2x-5)^2} > 5$;

8) $\sqrt{x^2} < x+1$; 9) $\sqrt{9-24x+16x^2} \le 8$; 10) $\sqrt[4]{x-5} < 3$.

Б

1) $\sqrt[3]{x+2} \le -5$; 2) $\sqrt{x^2-x-1} \le 1$; 3) $\sqrt{(x-6)(x-12)} < x-1$;

4) $\sqrt{x-6\sqrt{x-12}} < x-1$; 5) $\sqrt{3x+x^2} < 4-x$; 6) $\sqrt{3x+x^2} \ge 1+x$;

7) $\sqrt{8-x} + \sqrt{x-3} > 3$; 8) $x\sqrt{10-x^2} > x^2-6$;

9) $\sqrt{x^2+3x-18} > 2x+3$; 10) $\sqrt{2x-x^2} > 1-x$.

В

1) $\sqrt{-x^2+10x-16} + 3x^2 > -1$; 2) $x + 4 < \sqrt{-x^2-8x-12}$;

3) $\sqrt{\dfrac{x^3+8}{x}} > x-2$; 4) $\sqrt{\dfrac{1-x}{2x-5}} < 3$; 5) $\sqrt{1-x} \le \sqrt[4]{5+x}$;

6) $\dfrac{x-1}{2} > \sqrt{\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{4}}$; 7) $x + \sqrt{x-3} < 5$; 8) $(x-3)\sqrt{x^2+4} \ge x^2-9$;

9) $8\sqrt{12+16x-16x^2} + 4x - 4x^2 > 33$;

10) $\sqrt{25+|16x^2-25|} < 4 + 4|x-1|$.

☐ Логарифмические и показательные неравенства

12.10. Решите неравенство.

А

1) $2^x \cdot 5^{x-1} < 0{,}2 \cdot 10^x \cdot 2^{-x}$; 2) $3^{x+1} - 5^x + 3^{x-1} - 5^{x-1} > 5^{x-2} - 3^{x-2}$;
3) $52^x - 7^x - 52^x \cdot 35 + 7^x \cdot 35 \geq 0$; 4) $2^{x+2} + 8^x \geq 5 \cdot 4^x$;
5) $2 \cdot 25^x - 5 \cdot 10^x + 2 \cdot 4^x \leq 0$; 6) $6^x + 9^x \leq 2^{2x+1} + 1$; 7) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 \leq 0$;
8) $5^{2x+1} - 5^{x+2} \leq 5^x - 5$; 9) $250 \cdot 5^{3-x} - 2 \cdot 5^{x-3} > 0$;
10) $147 \cdot 7^{x-2} - 3 \cdot 7^{2-x} \leq 0$; 11) $\log_{\frac{1}{3}}(3x-1) - \log_{\frac{1}{2}} 6 > 0$;
12) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x + 1) \leq 2$; 13) $(x+1)\log_{0,7}3 - \log_{0,7}27 > 0$;
14) $\log_3 \log_{\frac{1}{2}}(2x+1) > 0$; 15) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(x-5) + 2\log_{\sqrt{3}}(x-5) < 4$;
16) $\log_{\sqrt{10}}(2x^2 + x) < 2$; 17) $\lg(2x - 51) - \lg(22 - x) \geq 2$;
18) $\log_3(3^x - 8) > 2 - x$; 19) $\log_8(9^x - 3^x - 8) < 2$;
20) $\log_3(4 \cdot 3^x - 1) < 2x + 1$.

Б

1) $4 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x < 5 \cdot 6^{\frac{x}{2}}$; 2) $\log_2(25^{x+3} - 1) < 2 + \log_2(5^{x+3} + 1)$;
3) $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^3 - 2) \geq 0$; 4) $\lg(1 - x^3) - \lg(1 - x^2) - 1 \geq 0$;
5) $2\lg\lg x < \lg(3 - 2\lg x)$; 6) $|2^x - 1| + |2^x - 2| \geq 1$;
7) $3 + 2\log_3(x+1)^3 > 2\log_3(x+1)$; 8) $\log_x 2 \log_2 x^2 < \log_4 2$;
9) $\log_{3x} x \leq \log_{9x} x$; 10) $\log_4 x + \log_x 2 - \log_4 \sqrt{x} < 1$.

В

1) $\dfrac{3^{2x}}{100^x} > 2(0{,}3)^x + 3$; 2) $9 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{\frac{1}{x}} \leq 4 \cdot 9^{\frac{1}{x}}$;

3) $5 \cdot 25^{\frac{1}{x}} + 3 \cdot 10^{\frac{1}{x}} \geq 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}}$; 4) $\dfrac{4 - 7 \cdot 5^x}{5^{2x+1} - 12 \cdot 5^x + 4} \leq \dfrac{2}{3}$;

5) $25^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} \leq 30$; 6) $\dfrac{4^x}{4^x - 3^x} < 4$; 7) $\dfrac{1}{\log_2 x - 4} \geq \log_x 2$;

8) $\log_2(x^2 - x) - 3\log_2 \dfrac{x}{x-1} > -2$;

9) $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)\log_2(x+1) + \log_{x+1}(x+2) > 0$;

10) $\log_{\frac{1}{2}} \log_8 \dfrac{x^2 - 1}{x - 2} < 0$.

□ Тригонометрические неравенства

12.11. Решите неравенство.

А

1) $\frac{1}{3}\sin 3x > \frac{1}{\sqrt{12}}$; 2) $\cos^2 x + 3\cos x > 0$; 3) $\sin^2 x - 4\sin x < 0$;

4) $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 > 0$; 5) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$; 6) $\sin x < \cos x$;

7) $\sin^3 x < \sin x$; 8) $\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x > 0$; 9) $\sin x\left(\cos x + \frac{1}{2}\right) \leq 0$;

10) $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 \geq 0$; 11) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x > 0$;

12) $(1 + \cos 4x)\sin 2x > \cos^2 2x$;

13) $\cos 3x + \sin x \sin 2x \geq 0$.

Б

1) $\sin 2x \sin 3x - \cos 2x \cos 3x > \sin 10x$; 2) $\sin^4 x + \cos 2x \leq \frac{1}{4}$;

3) $2\sin x + 3\cos x \geq 5$; 4) $4\sin x \sin 2x \sin 3x > \sin 4x$;

5) $\sin x \cos x \cos 2x \cos 8x < \frac{1}{4}\sin 12x$;

6) $(1 - \cos 2x)\sin^2 x + 2\cos^4 x \leq 0{,}5(5 - \cos 4x)$;

7) $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) \geq 1 + \operatorname{tg} x$;

8) $\sin^4 x + \cos^4 x > \sin x \cos x$;

9) $\sin x + \sin 2x \leq \cos x + 2\cos^2 x$;

10) $\sin^2 x + \sin^2 2x \leq \sin^2 3x$.

В

1) $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 4x > 8\sqrt{3}$;

2) $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > 0$; 3) $\sin 7x + \cos 2x \geq -2$;

4) $\cos x \cos 6x \leq -1$; 5) $\sin 4x + \cos 4x < \sin^2 2x + 1$;

6) $\sin^2 x \operatorname{tg} x + \cos^2 x \operatorname{ctg} x + \sin 2x \geq 4$; 7) $\sin 4x + 2\sin 2x < 4$;

8) $3\operatorname{tg}^2 x + 7 < \frac{2}{\sin^2 2x}$; 9) $\operatorname{ctg} x(\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x}) > 1$;

10) $\cos 4x + \sin^2 3x > 1$; 11) $\operatorname{ctg} x - 2\sin 2x < 1$.

■ Решение систем уравнений

12.12. Решите систему уравнений.

А

1) $\begin{cases} x-y=1, \\ x^3-y^3=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3-y^3=218, \\ x^2+xy+y^2=109; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12}, \\ x^2+y^2=25; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+xy=3, \\ xy^2+xy^3=12; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2+y^2=29, \\ xy=10; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ x+y=13; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x-y+xy=5, \\ x-y-xy=-7; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2-2xy+y^2=25, \\ 2x^2-2xy-y^2=11; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 2\cdot 6^x-3y=69, \\ 6^{x-1}-y=5; \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2^{2x-2y}+2^{x-y}-2=0, \\ 2^{2x+1}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2y-1}=5; \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 3^x\cdot 2^{1+y}=24, \\ \log_3(y-x)=0; \end{cases}$

12) $\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)}=60, \\ \lg(x-y)+\lg(x+y)=1+\lg 3; \end{cases}$ 13) $\begin{cases} 4^{-y}\cdot\log_2 x=4, \\ \log_2 x+2^{-2y}=4; \end{cases}$

14) $\begin{cases} y+\sin x=5, \\ 4y+2\sin x=19; \end{cases}$ 15) $\begin{cases} \cos x\cos y=3\sin x\sin y, \\ x+2y=\dfrac{3}{2}\pi. \end{cases}$

Б

1) $\begin{cases} xy=40, \\ x^{\lg y}=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}=6, \\ \log_4 x+\log_4 y=-3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y^{20x}=3^{300}, \\ x-\log_3 3y=1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3^{x-\sqrt{y+1}}=1, \\ 2^{x+3}=0{,}5\cdot 4^{y+2{,}5x}; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3^x-2^{2y}=77, \\ \sqrt{3^x}-2^y=7; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y-\log_3 x=1, \\ x^y=3^{12}; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2-4y^2=9, \\ xy+2y^2=18; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{7}{\sqrt{xy}}+1, \\ \sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}=78; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{3}{4}, \\ \cos 2x + 2\cos y = 1; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3 y, \\ \sin x = \cos 2y; \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x + 5y - 2z = 4, \\ 7x - 3y - 4z = 0, \\ 5x - y + 2z = 6; \end{cases}$

12) $\begin{cases} 2x - 3y - 6z = 10, \\ x + y + 2z = 0, \\ 3x + 2y - 4z = -2; \end{cases}$ 13) $\begin{cases} ax + y = a, \\ x + ay = 1; \end{cases}$ 14) $\begin{cases} a^2 x + y = a^2, \\ x + ay = 1. \end{cases}$

B

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{xy} - \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{2}, \\ x^2 y + xy^2 = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2 - x - 5 = 0, \\ \dfrac{1}{y-1} - \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{1}{x}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x^2 + 5xy - 4y^2 = 38, \\ 5x^2 - 9xy - 3y^2 = 15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1, \\ x^4 + x^2 y^2 + y^4 = 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2{,}5, \\ xy = 27; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \log_2 (x^2 + y^2) = 5, \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2\sin x \sin y + \cos 2y = \sqrt{2}, \\ \cos 2x + 2\cos x \cos y = -\sqrt{2}; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \cos x \cdot \sin y = \dfrac{1}{2}, \\ \sin 2x + \sin 2y = 0; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x + xy + y = 1, \\ y + yz + z = 2, \\ z + zx + x = 3. \end{cases}$

Матричные тесты

■ Равносильные уравнения ■ Равносильные неравенства ■ Число корней уравнения ■ Вид множества решений неравенства ■ План решения уравнения

■ Равносильные уравнения

A

12.13. Корни всех приведенных уравнений находятся среди чисел –3, –2, 1, 2, 3. Укажите пары равносильных уравнений.

Уравнение	$(x^2-6)^2=x^2$	$\sqrt{x^2-6}=\sqrt{-x}$	$(x-1)(x^2-6)=$ $=(1-x)x$	$(x-2)(x^2-6)=$ $=-x(x-2)$	$\frac{x^2+6}{x+3}=-\frac{x}{x+3}$
$x^2-6=-x$					
$(x^2+x-6)(x^2-x-6)=0$					
$x+3=0$					
$x-2=0$					
$(x-1)(x-2)(x+3)=0$					

Б

12.14. Корни всех приведенных уравнений находятся среди чисел -3, $3{,}1+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Укажите пары равносильных уравнений.

Уравнение	$(x-1)(x-3)=0$	$(x-1)(x^2-9)=0$	$\sqrt{x-1}\,(x-3)=0$	$(x-1)\sqrt{x^2-9}=0$	$(x-1)\sqrt{9-x^2}=0$
$\sqrt{x-1}\,(x^2-9)=0$					
$\sqrt{(x-1)^2}\,(x^2-9)=0$					
$\ln x(x^2-9)=0$					
$(\ln(x^2-8))(x-1)=0$					
$\sin(x-1)\sqrt{\frac{3-x}{x}}=0$					

В

12.15. Корни всех приведенных уравнений находятся среди чисел -4, $4{,}2+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Укажите пары равносильных уравнений.

Уравнение	$(2-x)(x^2-16)=0$	$(2-x)(x+4)=0$	$\sqrt{-x+2}\sqrt{x^2-16}=0$	$\sqrt{x-2}\,(x+4)=0$	$\sqrt{x-2}\,(x^2-16)=0$
$\sqrt{2-x}\,(x^2-16)=0$					
$\sqrt{(x-2)^2}\,(16-x^2)=0$					
$\ln(3-x)\sqrt{x^2-16}=0$					
$\frac{x-2}{2+4}\cdot(e^{x^2-16}-1)=0$					
$\frac{\operatorname{tg}(2-x)}{\sqrt{x}\sqrt{3-x}}=0$					

■ Равносильные неравенства

12.16. Укажите пары равносильных неравенств.

A

Неравенство	$\frac{1}{2x-1}\le 0$	$6x-3<0$	$-4x+2<0$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}<\frac{1}{3}$	$\ln(2x)<0$
$2x-1<0$					
$1-2x<0$					
$\frac{(2x-1)^2}{2x-1}\le 0$					
$\sqrt{x}\cdot(2x-1)<0$					
$\frac{1}{\lg(4x-1)}\ge 0$					

Б

Неравенство	$\sin 2x + \cos 2x \le \sqrt{2}$	$\dfrac{x-1}{x+3} \ge 0$	$\dfrac{x-2}{x^2-2x+2} \ge 0$	$\dfrac{(x-1)(x+2)^2}{\sqrt{x+3}} \ge 0$	$2\sin x - \cos x < -3$
$\dfrac{(x-1)(x-2)^2}{x+3} \ge 0$					
$\sqrt{x-2}\,\dfrac{x-1}{x+3} \ge 0$					
$\sqrt{x+3}(1-x) < 0$					
$x^2 - x + 3 < 2$					
$x^2 - 2x + 2 > 0$					

В

Неравенство	$\sqrt{x}(x-1)(x-2) > 0$	$\log_2(x-1) \le 1$	$(2^{3+x}-1)\times$ $\times(x+2)(x-1) \le 0$	$\dfrac{x+2}{x-1} \le 0$
$\dfrac{(x+2)(x-3)}{\sqrt{x-1}} \le 0$				
$\sqrt[3]{x-1} < x-1$				
$\dfrac{(x+2)(x+3)}{x-1} < 0$				
$\dfrac{\sqrt{x+2}(x+3)}{x-1} \le 0$				

Число корней уравнения

12.17. Для функции $f(x)$ укажите такую функцию $g(x)$, что уравнение $f(x) = g(x)$ имеет ровно один корень.

А

Функция $f(x)$	Функция $g(x)$				
	$g(x) = \frac{1}{2}x$	$g(x) = 4 - x$	$g(x) = x + 5$	$g(x) = 2$	$g(x) = -3 - x^2$
$f(x) = x$					
$f(x) = x^2 - 3$					
$f(x) = x^3$					
$f(x) = e^x$					
$f(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$					

Б

Функция $f(x)$	Функция $g(x)$				
	$g(x) = 2 - 3x$	$g(x) = 2 - x$	$g(x) = x + 3$	$g(x) = 1 - x^2$	$g(x) = 4$
$f(x) = x$					
$f(x) = 1 + x^2$					
$f(x) = -x^3$					
$f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$					
$f(x) = \lg x$					

В

Функция $f(x)$	Функция $g(x)$				
	$g(x) = (x - 2)^2$	$g(x) = 2 - x$	$g(x) = x - 1$	$g(x) = -(x - 2)^2 - 1$	$g(x) = 100$
$f(x) = \ln x$					
$f(x) = e^x$					
$f(x) = \sin x$					

Окончание таблицы

Функция $f(x)$	Функция $g(x)$				
	$g(x) = (x-2)^2$	$g(x) = 2-x$	$g(x) = x-1$	$g(x) = -(x-2)^2 - 1$	$g(x) = 100$
$f(x) = (x+2)^2 + 100$					
$f(x) = \dfrac{1}{x-10} + 100$					

Вид множества решений неравенства

12.18. Для каждого из неравенств укажите вид множества его решений.

А

Неравенство	Промежуток			Два луча		
	$[a;\ b]$	$(a;\ b)$	$[a;\ b)$ или $(a;\ b]$	$(-\infty;\ a] \cup [b;\ +\infty)$	$(-\infty;\ a) \cup (b;\ +\infty)$	$(-\infty;\ a] \cup (b;\ +\infty)$ или $(-\infty;\ a) \cup [b;\ +\infty)$
$\dfrac{x+3}{x-4} < 0$						
$x^2 - 4x + 3 \geq 0$						
$\dfrac{2-x}{x+5} < 0$						
$\dfrac{x+6}{7-x} \geq 0$						
$\dfrac{x-5}{x+3} \geq 0$						
$1 - x^2 \geq 0$						

Б

Неравенство	Промежуток			Два луча		
	$[a;\ b]$	$(a;\ b)$	$[a;\ b)$ или $(a;\ b]$	$(-\infty;\ a] \cup [b;\ +\infty)$	$(-\infty;\ a) \cup (b;\ +\infty)$	$(-\infty;\ a] \cup (b;\ +\infty)$ или $(-\infty;\ a) \cup [b;\ +\infty)$
$\dfrac{10-x}{5+x} \geq 0$						

Неравенство	Промежуток			Два луча		
	$[a; b]$	$(a; b)$	$[a; b)$ или $(a; b]$	$(-\infty; a] \cup [b; +\infty)$	$(-\infty; a) \cup (b; +\infty)$	$(-\infty; a] \cup (b; +\infty)$ или $(-\infty; a) \cup [b; +\infty)$
$5 - x^2 \geq 0$						
$-2x^2 + 3x - 2 \leq 0$						
$\dfrac{1}{x^2 - 4} \leq 0$						
$\dfrac{2x+3}{2-x} < 0$						
$\dfrac{x+4}{2x-3} \geq 0$						

В

Неравенство	Промежуток				
	$(-\infty; a)$	$(-\infty; a]$	$(a; +\infty)$	$[a; +\infty)$	$(a; b)$
$\log_{\frac{1}{5}} x < 5$					
$23 - x \geq 2$					
$\dfrac{1}{\sqrt{2+x}} \leq 3$					
$0 \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{5-x} < 1$					
$\ln(2 - x) < 5$					

■ План решения уравнения

12.19. Для каждого уравнения выберите оптимальный первый шаг в решении:

1) сделать замену переменной;
2) выделить общий множитель;
3) подобрать один корень и воспользоваться монотонностью функций, стоящих в разных частях уравнения;
4) возвести обе части в квадрат.

А

Уравнение	Шаги решения			
	1)	2)	3)	4)
$\log_3 x = 4 - x$				
$(x-1) + \sqrt{x-1} = 2$				
$\sin^3 x + 3\sin x\cos x = 0$				
$\sqrt{x^2+2x+2} = x+5$				

Б

Уравнение	Шаги решения			
	1)	2)	3)	4)
$\log_2 x = \sqrt{6-x} - 1$				
$\sqrt{x+\dfrac{1}{x}+1} = \dfrac{x^2+1}{x} - 2$				
$\sin^4 x - 1 = \cos^2 x$				
$\sin x - \cos x = \dfrac{1}{2}$				

В

Уравнение	Шаги решения			
	1)	2)	3)	4)
$\dfrac{1}{\sin x} = 1 - \operatorname{ctg} x$				
$\sqrt{2^x - 1} = \sqrt{1+\log_{\frac{1}{2}} x}$				
$x^2 + x + 3 =$ $= 2\sqrt{(x-1)(x+2)}$				
$\sqrt{x^3-1} = \sqrt{x^2+x+1}$				

Самостоятельные работы

■ Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства ■ Логарифмические и показательные уравнения и неравенства ■ Тригонометрические уравнения

■ Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства

12.20. Решите уравнение.

А

1) $\dfrac{1}{x^2+2}-\dfrac{1}{x^3+3}=\dfrac{1}{12}$; 2) $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^2+8}=6$.

Б

1) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{48}{x^2}=10\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x}\right)$; 2) $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$.

В

1) $7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=9$; 2) $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x-1}{x}$.

12.21. Решите неравенство.

А

$\dfrac{x+3}{x^2+4x-5}\ge 0$.

Б

$|x^2-2x-8|>2x$.

В

При всех значениях a: $ax^2-2ax+1>0$.

■ Логарифмические и показательные уравнения и неравенства

12.22. Решите уравнение.

А

1) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\left(\dfrac{9}{8}\right)^x=\dfrac{27}{64}$; 2) $\lg(x-1)+\lg(x+1)=3\lg 2+\lg(x-2)$.

Б

$16^{\frac{x-1}{x}} \cdot 5^x = 100.$

В

1) $2\sqrt{x} \cdot 4^x + 5 \cdot 2^{x+1} + 2\sqrt{x} = 2^{2x+2} + 5\sqrt{x} \cdot 2^x + 4;$

2) $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5.$

12.23. Решите неравенство.

А

$5^{2x-1} + 5^x + 1 \geq 11.$

Б

1) $\log_x 2 \log_2 x^2 \log_2(16x) \geq 1;$ 2) $\lg^2 x^2 - 2\lg x^2 > 3.$

В

$\log_5\left(6 + \frac{2}{x}\right) + \log_{0,2}\left(1 + \frac{x}{10}\right) \leq 1.$

Тригонометрические уравнения

12.24. Решите уравнение.

А

1) $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0;$
2) $\cos^2 2x + \cos^2 3x = 1;$
3) $\cos 7x(\sin 5x - 1) = 0.$

Б

1) $\sin 2x = \sin^4 x + \cos^4 x;$
2) $\cos 2x + \sin 2x + \cos x - \sin x = 1;$
3) $4\sin 2x \sin 5x \sin 7x = \sin 4x.$

В

1) $\sin x \operatorname{tg} x = \cos x + \operatorname{tg} x;$
2) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x = 0;$
3) $\sin^3 x + \cos^3 x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x.$

Контрольные тесты с выбором ответа

■ Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства ■ Логарифмические и показательные уравнения и неравенства ■ Тригонометрические уравнения

■ Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства

12.25. Решите уравнение и укажите сумму его корней.

А

1) $(x^2 + 4x)^2 - (x + 2)^2 = 16.$

а	б	в	г
-6	6	-8	2

2) $\sqrt{3x + 3x^2} = 1 + x.$

а	б	в	г
$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

Б

1) $4x^3 + 3x - 2 = 0.$

а	б	в	г
0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

2) $3x^2 + 21x + 34 + \sqrt{x^2 + 7x + 16} = 0.$

а	б	в	г
-7	7	-5	-3

В

1) $\dfrac{x}{x^2 + 7x + 1} = \dfrac{x^2 + 8x + 1}{x^2 + 6x + 1}.$

а	б	в	г
Решений нет	$\left\{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{2}}}{4}\right\}$	$\left\{\dfrac{6\sqrt{5}+\sqrt{11}}{2}\right\}$	$\left\{\dfrac{2\sqrt{5}\pm 1}{3}\right\}$

2) $x-2\sqrt{x\sqrt{x-1}+2}+2=0.$

а	б	в	г
$3\sqrt{2}$	0	2	12

■ Логарифмические и показательные уравнения и неравенства

А

12.26. Решите уравнение $\lg(\lg x)+\lg(\lg x^2-2)=0$.

а	б	в	г
$10\sqrt{10}$	100	Решений нет	10

12.27. Решите уравнение $\dfrac{2^{2x-1}\cdot 4^{x+1}}{8^{x-1}}=64$ и укажите промежуток, которому принадлежат его корни.

а	б	в	г
(–1; 1)	(1; 3)	(3; 5)	(5; 7)

12.28. Решите неравенство $\log_4(x+2)-\log_4(x+5)<1$.

а	б	в	г
$(-2, +\infty)$	$(-2, 5)$	$(0, 11)$	$(6, 14)$

Б

12.29. Решите уравнение: $3+2\log_{x+1}3=2\log_3(x+1)$.

а	б	в	г
$\left(\dfrac{1}{2};1\right)$	$\left(\dfrac{\sqrt{3}-3}{3};26\right)$	$\left(\dfrac{\sqrt{3}-3}{3};8\right)$	$\left(\dfrac{\sqrt{3}-3}{3};11\right)$

12.30. Решите неравенство $\sqrt{\log_3 \frac{2x-3}{1-x}} < 1$.

а	б	в	г
$\left(\frac{6}{5}; \frac{4}{3}\right]$	$\left(\frac{7}{6}; \frac{6}{4}\right)$	$\left(\frac{6}{5}; \frac{4}{3}\right)$	$\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}; \frac{4}{3}\right)$

В

12.31. Решите неравенство $\log_2(x^2 - x) - 3\log_2 \frac{x}{x-1} > -2$.

а	б	в	г
$(-\infty; 0)$	$(2; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$	$\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

12.32. Решите неравенство $\log_x 2 \log_2 x^2 \log_2 4x < 2\sqrt{2}$.

а	б	в	г
$\left(2^{-\sqrt{2}}; \frac{1}{4}\right)$	$\left(2^{-\sqrt{2}}; 2^{\sqrt{2}}\right)$	$\left(0; 2^{\sqrt{2}-2}\right)$	$\left(2^{-\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(1; 2^{\sqrt{2}}\right)$

12.33. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 5x + 7} \geq 2x - 3$.

а	б	в	г
$\left[\frac{1}{5}; 5\right]$	$\left[\frac{1}{2}; 5\right]$	$[5, +\infty)$	$\left[\frac{3}{2}; 2\right]$

Тригонометрические уравнения

12.34. Решите уравнение.

А

1) $3 + 5\sin 2x = \cos 4x$.

а	б	в	г
$\left\{\frac{\pi(6n+1)}{12}\right\}$	$\left\{\frac{\pi(6n-1)}{12}\right\}$	$\left\{\frac{\pi(6n-(-1)^n)}{12}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{2}n\right\}$

2) $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0$.

а	б	в	г
$\left\{\frac{\pi(2n+1)}{4}\right\}$	$\left\{\frac{\pi n}{2}\right\}$	$\left\{(-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + n\pi\right\}$	$\{\pi n\}$

3) $\cos 3x = \sin 5x$.

а	б	в	г
$\left\{\frac{\pi}{4} + \pi k;\ \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}k\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{4}n\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{16}k\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{8}k\right\}$

Б

1) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x = 0$.

а	б	в	г
$\left\{\frac{\pi}{24}k\right\}$	$\left\{\frac{\pi(2k+1)}{8}, \frac{\pi(3k\pm 1)}{3}\right\}$	$\left\{(-1)^k \arcsin\frac{2}{3} + \pi k\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{3}k\right\}$

2) $\sqrt{13 - 18\operatorname{tg} x} = 6\operatorname{tg} x - 3$.

а	б	в	г
$\left\{\frac{\pi}{3}n\right\}$	$\left\{\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + 2\pi n\right\}$	$\left\{\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi n\right\}$	$\left\{\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \frac{\pi n}{2}\right\}$

3) $\sin x \cos x + \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2}\sin 3x$.

а	б	в	г
$\left\{\frac{\pi}{16}k\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{3}k\right\}$	$\{\pi k\}$	$\left\{\frac{\pi}{8}k\right\}$

В

1) $\sin x \operatorname{tg} x + \cos x \operatorname{ctg} x - \sin 2x = 1$.

а	б	в	г
$\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi k\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{4} + \pi k\right\}$	$\left\{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right\}$	$\left\{\frac{\pi k}{4}\right\}$

2) $\left(2\sin^4\frac{x}{2}-1\right)\cdot\frac{1}{\cos^4\frac{x}{2}}=2.$

а	б	в	г
$\left\{\frac{2}{3}\pi+\pi k\right\}$	$\left\{-\frac{2}{3}\pi+\pi k\right\}$	$\left\{\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k\right\}$	$\left\{\frac{2}{3}\pi+2\pi k\right\}$

3) $2\operatorname{ctg}2x-\operatorname{ctg}x=\sin 2x+3\sin x.$

а	б	в	г
$\left\{-\frac{2}{3}\pi+2\pi k\right\}$	$\left\{\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k\right\}$	$\left\{\frac{2}{3}\pi\right\}$	$\left\{\frac{2}{3}\pi+\pi k\right\}$

Ответы

Глава 1

Тренажеры

■ Действия с дробями

1.1. А 3) $\frac{119}{400} = 0{,}2975$.

Б 1) $\frac{16}{11} = 1\frac{5}{11}$; 3) $\frac{1\,665}{1\,331} = 1\frac{334}{1\,331}$.

В 2) $\frac{101}{64}$; 3) $\frac{5\,137}{10\,000}$.

1.2. А 1) $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{711}{100}$.

Б 2) $\frac{157}{500}$; 3) $\frac{200}{99}$.

В 2) $\frac{3\,409}{1\,250}$.

1.3. А 2) 0,4375; 4) 5,(3).

Б 1) 0,(03); 2) 1,(75342465); 3) $\frac{128}{73}$.

В 2) 0,(126); 4) 13,208(3).

■ Разложение натурального числа по степеням простых чисел

1.4. А 3) $3^3 13^2$.

Б 1) 11^4; 3) $7 \cdot 13 \cdot 19$.

В 1) $2^2 3^6 7^3$; 3) $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$.

1.5. А 2) 495.

Б 1) 27 783.

В 1) 216 216; 2) 3 360.

1.6. А 4.

Б 5.

В 5.

1.7. А 2.

Б 3.

В 31.

1.8. **А** 1) 2, 5, 11; 2) 3, 13, 139; 3) 2, 3, 7, 13, 17, 37.

Б 1) 7, 11; 2) 2, 3, 7; 3) 2, 5, 7.

В 1) 2, 3, 13, 17; 3) 2, 3, 5, 13.

Делимость, остатки

1.9. **А** 1) 0, 1, 0, 1, 0, 1, 6, 4; 3) 1, 0, 3, 3, 3, 0, 3, 1.

Б 1) 0, 0, 0, 1, 0, 0, 6, 1; 3) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1.

В 1) 0, 0, 0, 1, 0, 0, 6, 1; 3) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1.

Системы счисления

1.11. **А** 1) 8; 2) 10 000 000 000; 3) 0,25.

Б 1) 101 001 001 111; 2) 85; 3) 0,5.

В 1) 111 001 000 110; 2) 3 753; 3) 1,6875.

Приближенные вычисления, погрешности

1.13. **А** 1) 0,018 %.

Б 1) 0,0029 %.

1.14. **А** 1) $7{,}353 \cdot 10^5$; 2) $3{,}344 \cdot 10^6$.

Б 1) $6{,}005 \cdot 10^0$; 2) $1{,}1 \cdot 10^{-8}$.

В 1) $1{,}392 \cdot 10^{-1}$; 2) $7{,}543 \cdot 10^{-2}$.

1.15. **В** 2) 0,02; –0,02; 0,00; 0,01.

1.16. **А** 1) 0,4 %; 2) 0,02 %.

Б 1) 0,03 %.

В 1) 0,008 %; 2) 0,04 % (погрешность мантиссы равна половине отброшенного разряда, т. е. 0,0005).

Комплексные числа

1.17. **А** 6) $1{,}5 + 3i$.

Б 3) $\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i$; 4) -1.

В 2) $-\frac{5}{26} + \frac{7}{13}i$; 5) $4 + i$; 6) 8.

1.18. **А** 1) круг радиусом 1 с центром в i; 2) прямая, состоящая из точек, равноудаленных от i и -4.

Б 1) внешность круга радиусом 4 с центром в $2-i$; 2) вещественная ось; 3) полуплоскость $x \geq -0{,}5$.

В 1) Внешность круга радиусом $\frac{16}{3}$ с центром в точке $z = -\frac{23}{3}$; 3) $\varnothing$.

1.19. **А** 1) $\pm i$; 2) 3, $\pm i$; 3) $-1; \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Б 1) $1; -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$; 2) $1; \pm i\sqrt{3}$; 3) $x^4 - 1 = 0$; ± 1; $\pm i$.

В 1) $-1; -2 \pm \sqrt{2}$; 2) $\pm i$; $\pm\sqrt{3}i$; 3) $\pm i$; ± 1.

Матричные тесты

■ Нахождение НОД и НОК

1.20. **А**

Числа	НОК; НОД			
	24; 3	108; 18	144; 18	36; 3
36; 54		+		
18; 144			+	
12; 9				+
3; 24	+			

Б

Числа	НОК; НОД			
	27648; 8	1332; 2	1274; 91	11088; 7
36; 74		+		
1024; 216	+			
637; 182			+	
112; 693				+

В

Числа	НОК; НОД			
	900; 60	1890; 3	2975; 17	4515; 43
135; 42		+		
425; 119			+	

Числа	НОК; НОД			
	900; 60	1 890; 3	2 975; 17	4 515; 43
301; 645				+
180; 300	+			

■ Делимость чисел

1.21. **А**

Число	Остаток от деления на 2 и на 3			
	1; 1	0; 1	1; 0	0; 0
256		+		
324				
751	+			+
537			+	

Б

Число	Остаток от деления на 4 и на 11			
	1; 4	0; 5	3; 1	3; 4
331			+	
324		+		
103				+
169	+			

В

Число	Остаток от деления на 9 и на 13			
	1; 6	7; 10	2; 1	4; 6
5^{20}			+	
1 024		+		
1 111				+
721	+			

■ Комплексные числа

1.22. **А**

Условие	Re $z = 1$	Im $z = 1$	$\lvert z \rvert = 1$	$\lvert z \rvert \le 1$
Прямая, параллельная оси Oy		+		
Окружность радиуса 1			+	
Прямая, параллельная оси Ox	+			
Круг радиуса 1				+

Б

Условие	Re $z > 1$	$\lvert z \rvert = 5$	Im $z = 11$	$z\bar{z} = 5$
Полуплоскость, ограниченная слева прямой $x = 1$	+			
Окружность радиуса 5		+		
Окружность радиуса $\sqrt{5}$				+
Прямая, параллельная оси Ox			+	

В

Условие	$\lvert z \rvert + \lvert z - i \rvert = 5$	$\lvert z \rvert = 5$	$\lvert z \rvert + \lvert z + i \rvert = 5$	$\overline{zz} = 5$
Эллипс с фокусами в точках с координатами (0, 0) и (0, 1)	+			
Окружность радиуса 5				+
Окружность радиуса $\sqrt{5}$		+		
Эллипс с фокусами в точках с координатами (0, 0) и (0, –1)			+	

1.23. **А** *Вариант 1.* 1) а) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$; б) $13 \cdot 43$; 2) 49; 558.

Вариант 2. 1) а) $13 \cdot 41$; б) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 23$; 2) 25; 1575.

Б *Вариант 1.* 1) $3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$; 2) 88; 21 736.

Вариант 2. 1) $3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257$; 2) 8; 511 632.

1.24. **В** *Вариант 1.* 11.

Вариант 2. 111.

1.25. **А** *Вариант 1.* 1) 11111110; 2) 26; 11; 37.

Вариант 2. 1) 110011100; 2) 19; 13; 32.

Б *Вариант 1.* 1) 1010011010; 2) 4,25; 6,875; 11,125.

Вариант 2. 1)1000110001; 2) 5,75; 3, 375; 9,125.

В 1) 10011001,01; 11111000,11; 110010010.

1.27. **А** *Вариант 1.* 1) $\approx$ 0,07 %; 2) 254,35; 3) 0,06.

Вариант 2. 1) $\approx$ 0,29%; 2) 716,95; 3) –0,06.

Б *Вариант 1.* 1) $\approx$ 0,15%; 2) 1,55; 3) 8,08.

Вариант 2. 1) $\approx$ 0,13%; 2) 1,23; 3) 0,00.

В 1) $\approx$ 0,08%; 2) 6,21; 0,02.

1.29. **А** *Вариант 1.* 1) $-\frac{53}{13}+i\frac{83}{13}$; 3) $-\frac{7}{2}\pm i\frac{3\sqrt{39}}{2}$.

Вариант 2. 1) $5+5i$; 3) $\frac{11}{2}\pm i\frac{\sqrt{239}}{2}$.

Б *Вариант 1.* 1) $-\frac{1}{5}+i\frac{8}{5}$; 3) 2; $-1\pm i\sqrt{3}$.

Вариант 2. 1) $-\frac{229}{65}-i\frac{38}{65}$; 3) –2; $1\pm i\sqrt{3}$.

В *Вариант 1.* 1) $-\frac{1}{5}-i\frac{14}{5}$; 3) $\pm i\sqrt{7}$; $\pm i$.

Вариант 2. 1) $-\frac{9}{5}-2i$; 3) $\pm 2i$; $\pm 2i\sqrt{2}$.

Контрольные тесты с выбором ответа

Комплексные числа

А **1.30.** в. **1.31.** а. **1.32.** б

Б **1.33.** б. **1.34.** в. **1.35.** б.

В **1.36.** г. **1.37.** б. **1.38.** в.

Делимость, остатки

А **1.39.** в. **1.40.** б.

Б **1.41.** б. **1.42.** в.

В **1.43.** в. **1.44.** в.

■ Системы счисления

А **1.45.** б.

Б **1.46.** г.

В **1.47.** в.

Глава 2

Тренажеры

■ Вычисление значений выражений

2.1. **А** 3) 0,018; 5) 0,06; 8) $-\frac{7}{5}$; 10) 0,16; 13) 20; 15) –4; 17) –2; 20) – 4; 21) $\frac{5}{2}$; 23) 125; 26) 2; 28) 50; 29) 50; 30) 6.

Б 3) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{5}$; 6) $3\frac{1}{3}$; 7) $\frac{1}{512}$; 11) 2; 12) 2; 13) $\frac{16}{25}$; 14) 0; 15) $\frac{1}{3}$.

В 2) 5; 4) $3-\sqrt{7}$; 6) $\frac{10}{3}$; 7) 3; 8) $13\cdot\sqrt[6]{2}$; 10) $\frac{1}{6}$; 11) 2; 14) 0.

■ Логарифмирование выражений. Нахождение выражения по его логарифму

2.2. **А** 2) в) $-2-\log_3 37$; г) $\frac{2}{3}+\log_3 2$; 3) б) $\frac{7}{8}$; г) $\frac{25}{16}$.

2.3. **Б** 2) $2\sqrt{3}$; 3) $11x^2$; 4) $\frac{343}{\sqrt[4]{3}}$; 6) $\sqrt{3}\cdot 5^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$; 7) $2^{\frac{16}{3}}$; 8) $\frac{1}{2}\log_2 50$; 9) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{10x^3}$; 10) $\frac{\sqrt{a}}{c\sqrt[3]{b}}$.

2.4. **В** 8) $\frac{7}{12}\lg 3+\frac{3}{4}\lg 7+\frac{1}{3}\lg 29-\frac{1}{2}37$; 10) $\frac{18}{7}\lg 3+\frac{2}{21}\lg 5$.

■ Преобразование выражений

2.5. **А** 2) $\frac{1}{3x}$; 4) $\frac{1}{a^2b}$; 6) 1; 8) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$; 10) $\frac{2}{a-b}$; 12) 22; 15) $\frac{17-7\sqrt{5}}{4}$; 16) $3-\sqrt{6}$; 17) $-\frac{1}{6}\left(1+7^{\frac{1}{4}}+7^{\frac{1}{2}}+7^{\frac{3}{4}}\right)$; 18) $\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$; 19) $4+2\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{49}$; 21) 1; 22) 6; 25) –3; 26) $11^8\cdot 10^{-6}$; 27) 3; 29) 1; 30) 1.

Б 1) 2; 2) 5; 3) $a\left(\sqrt[4]{\frac{a}{b}}+1\right)^2$; 4) $-2\sqrt{a}$; 6) $\frac{1}{a}$; 7) $\sqrt{a^2-1}$;

8) $-\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)$; 10) $m-n$; 11) 1; 12) $\frac{5}{2}$; 13) 1; 15) 2.

В 1) $\frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}-1+x}$; 2) 2; 3) 2; 4) $\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}$; 5) $2\sqrt[4]{ax}$;

6) $\frac{1}{12}\left(\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}\right)$; 7) $\frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{5}-1\right)$; 9) 9; 12) $\frac{3}{2}$; 13) 6; 15) 0.

Сравнение значений выражений

2.6. **А** 4) $10^{20} > 20^{10}$; 5) $9^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-10}$; 7) $27^3 > 3^6$; 9) $\left(\frac{11}{13}\right)^4 < \left(\frac{13}{11}\right)^4$;

10) $27^{\frac{2}{3}} < 9^{\frac{5}{2}}$; 12) $\log_{\frac{1}{5}} 7 > \log_{\frac{1}{5}} 8$; 13) $\log_5 7 < \log_2 5$;

15) $\lg 0{,}7 < \lg\frac{8}{11}$; 17) $\lg 0{,}7 > \lg(0{,}7)^2$; 18) $\lg(0{,}5)^2 < \lg^2 0{,}5$;

20) $299 \cdot 301 < 300^2$.

Б 4) $296^3 - 214^3 > (296-214)^3$; 6) $2\,048^3 = 2^{33}$; 7) $28^{16} > 79^{12}$;

8) $1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot 10^{10} < 10^{55}$; 9) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$;

12) $\log_{0,7} 2 + \log_{0,7} 18 > 3\log_{0,7} 4$; 15) $\frac{\lg 57 + \lg 73}{2} < \lg\frac{57+73}{2}$;

18) $1 - 2\lg 2 + \lg 3 < 2\lg 11$; 20) $\frac{1}{2} + \lg 3 > \lg 20 - \lg 3$.

В 2) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} > \sqrt[13]{5}$; 4) $\sqrt[12]{623} < \sqrt[3]{5}$; 6) $\sqrt{7}+\sqrt{15} < 7$;

8) $\sqrt{12}-\sqrt{11} < \sqrt{11}-\sqrt{10}$; 9) $\sqrt[30]{1}+\sqrt[4]{2} > 2$; 11) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3} > \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$;

12) $(\log_2 5)^2 > \log_2 20$; 13) $\log_\pi 2 + \log_2 \pi > 2$; 15) $3^{\log_8 2} = 2^{\log_8 3}$;

17) $2^{\sqrt{\log_2 3}} = 3^{\sqrt{\log_3 2}}$; 18) $\frac{4}{\lg 0{,}5} > \frac{7}{\lg 0{,}5}$; 19) $\log_{20} 80 < \log_{80} 640$;

20) $\log_{135} 675 < \log_{80} 480$.

Уравнения

2.7. **А** 2) 3; 4) 1; 5) 2; 6) $\frac{8}{3}$; $-\frac{2}{3}$; 7) ± 2; 8) 25; 9) $1 \le x \le 2$; 10) -1; 3;

12) $\frac{3}{2}$; 13) 1; 15) 0; 16) 1; 17) $\log_4 3 - 1$; 19) 1; 23) 2; 30) $-\frac{1}{2}$.

Б 1) -1; 2) 7; 3) 9; 4) 30; 5) 7; 8; 6) ± 4; 8) 64; 9) -2; 6; 10) 2;

12) 20; 13) 10^{-5}; 1 000; 14) $\frac{1}{8}$; 64; 18) -2; 20) 100.

В 1) –5; 2) 1; 3) 1 (*Указание*: сводится к уравнению $5t^3 + 3t - 8 = 0$, где $t = x^{\frac{2}{15}}$); 4) 3 (*Указание*: замена $t = \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$); 5) $\frac{190}{63}$; $\frac{2185}{728}$ (*Указание*: замена $t = \sqrt[3]{\frac{x-3}{x-2}}$); 6) 2 (*Указание*: замена $t = \sqrt[3]{x^3 + x - 2}$); 7) –1; 8) 5; 9) 1; 10) $\frac{5}{2}$; 11) –1; 12) 48; 13) 2; 14) $-\frac{5}{4}$; 15) 1; 16) 20; 17) 0; 3; 18) 2; 19) 1; 2; 20) 13.

■ Неравенства

2.8. **А** 1) (0; 1); 3) $\left[0; \frac{8}{5}\right)$; 4) $(-\infty; 0{,}15]$; 5) $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$; 7) $\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{9}\right]$; 8) (1/4; 4); 9) $(4;5) \cup (5;+\infty)$; 10) $\left(0; 2^{-\frac{4}{3}}\right) \cup (2;+\infty)$.

Б 1) $(1;4] \cup \{5\}$; 4) (0;3); 5) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$; 7) $\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{6}\right)$; 8) (–1; 1]; 9) $(0{,}01;1) \cup (10;+\infty)$; 10) [0;1).

В 1) [3; 7); 2) [–1; +∞); 3) $\left[\begin{array}{l} a > 3, \quad x \ge -2, \\ a = 3, \quad x > -2, \\ 0 < a < 3, x > \dfrac{9 - 6a - a^2}{a^2}, \\ a \le 0, \quad \varnothing; \end{array}\right.$ 4) (–∞; 7); 5) (0; +∞); 6) [3; +∞); 7) $[1; \log_2 3]$; 8) нет решений; 10) $(\log_{72} 54; \log_{1,125} 1{,}5)$.

Матричные тесты

■ Вычисление корней

2.9. **А**

Выражение	Значение			
	10	20	50	80
$\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}$	+			
$\sqrt[3]{100} \cdot \sqrt[6]{6400}$		+		
$\sqrt{250} \cdot \sqrt{10}$				+
$\sqrt[4]{500} \cdot \sqrt{128\sqrt{5}}$			+	

Б

Выражение	Значение			
	6	12	18	24
$\dfrac{\sqrt[4]{16\cdot 81}\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$		+		
$\dfrac{\sqrt[3]{108}\cdot\sqrt[6]{27\cdot 256}}{\sqrt{12}}$	+			
$\dfrac{\sqrt[3]{72}\cdot\sqrt{108}}{\sqrt[6]{192}}$			+	
$\dfrac{\sqrt{96}\cdot\sqrt[3]{36}}{\sqrt[6]{6}}$				+

В

Выражение	Значение			
	$\sqrt{5}-2$	$2-\sqrt{5}$	$1+\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}-1$
$\sqrt{6+2\sqrt{5}}$			+	
$\sqrt{9-4\sqrt{5}}$	+			
$1-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$		+		
$\sqrt{21-4\sqrt{5}}$				+

■ Преобразование степеней

2.10. **А**

Выражение	Значение			
	$8a^{-1}$	8	$8a$	$8a^2$
$\left(4a^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$	+			
$\left(\sqrt{2}\cdot a^{\frac{4}{3}}\right)^{6} a^{-6}$				+
$\dfrac{\left(4a^{-\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{4}}}{(2a)^{-\frac{1}{2}}}$		+		

Окончание таблицы

Выражение	Значение			
	$8a^{-1}$	8	$8a$	$8a^2$
$\left(\dfrac{a^{\frac{4}{3}}}{2a^{\frac{5}{3}}}\right)^{-3}$			+	

Б

Выражение	Значение			
	ab^{-2}	ab^{-1}	1	ab^2
$\dfrac{(ab^{-2})^{-\frac{3}{2}}}{(a^{-1}b^2)^{\frac{5}{2}}}$	+			
$\dfrac{(a^{-1}b^2)^{-\frac{1}{2}}(a^2b^{-1})^{\frac{3}{4}}}{(a^{-4}b^{15})^{-\frac{1}{4}}}$				+
$\dfrac{(a^2b)^{-\frac{1}{3}}(a^{-4}b^4)^{-\frac{1}{4}}}{(a^{-1}b^2)^{-\frac{2}{3}}}$			+	
$\dfrac{(a^3b^{-1})^{-\frac{1}{2}}\left(a^3b^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}}{\left(a^{-\frac{7}{3}}b^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{3}{4}}}$		+		

В

Выражение	Значение			
	$a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$	$a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}$	$-\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$	$-\left(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}\right)$
$\dfrac{a\cdot a^{\frac{1}{3}}-b\cdot b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}}$			+	
$\dfrac{a^2+b^2}{a^{\frac{4}{3}}-(ab)^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}}}$	+			

Выражение	Значение			
	$a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$	$a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}$	$-\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$	$-\left(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}\right)$
$\dfrac{a^2-b^2}{-\left(a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}}\right)}$				+
$\dfrac{a\cdot a^{\frac{1}{3}}-b\cdot b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$		+		

■ Логарифмирование выражений

2.11. **А**

Выражение	Значение			
	$-\frac{14}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{13}{3}$
$\log_2\left(\sqrt[3]{4}\cdot\frac{1}{16}\right)$		+		
$\log_2\frac{32}{\sqrt[3]{4}}$				+
$\log_2\frac{\sqrt[3]{16}}{64}$	+			
$\log_2\frac{16}{\sqrt[3]{32}}$			+	

Б

Выражение	Значение			
	–4	–5	–6	–7
$\log_2\frac{1{,}25}{80}$			+	
$\log_2\frac{25\cdot 0{,}12}{48}$	+			
$\log_2\frac{0{,}4}{12{,}8}$		+		

Выражение	Значение			
	−4	−5	−6	−7
$\log_2 \dfrac{0,125}{16}$				+

2.12. **В**

Выражение	Значение			
	0,125	0,25	0,5	1
$\lg\sqrt[4]{10}$	+			
$3^{-\log_3 2}$				+
$3^{\lg 100-2}$			+	
$(\log_2 256)^{-1}$		+		

■ Сравнение числовых выражений

2.13. **А**

Выражение	Значение			
	a_1	a_2	a_3	a_4
$\sqrt{2\sqrt[4]{16}}$		+		
$\sqrt{5}$				+
$\sqrt[3]{9}$			+	
$\dfrac{\sqrt{15}}{2}$	+			

Б

Выражение	Значение			
	a_1	a_2	a_3	a_4
$\sqrt{3\sqrt[3]{4}}$		+		
$\sqrt{2}\cdot\sqrt[6]{15}$			+	
$\sqrt[3]{10}$	+			

Выражение	Значение			
	a_1	a_2	a_3	a_4
$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}$				+

В

Выражение	Значение			
	a_1	a_2	a_3	a_4
$\sqrt{2}+\sqrt{5}$	+			
$\sqrt{20}$				+
$3\sqrt{3}-\sqrt{2}$			+	
$2+\sqrt{3}$		+		

■ Уравнения

2.14. **А**

Уравнение	(–1; 1)	(1; 3)	[0; 3]	Корней нет
$2^{x^2}=4^x$			+	
$\sqrt{x^2-2x}=2-x$		+		
$\sqrt{x^2-2x}=-x$	+			
$\sqrt{x^2-2x}=x-1$				+

2.15. **Б**

Уравнение	Уравнение имеет один корень	Уравнение имеет два положительных корня	Уравнение имеет два корня разных знаков	Корней нет
$2^{x^2}=4^{x+1}$			+	
$2^{x^2}=\frac{1}{2}$				+
$4^x+2^x=2$	+			
$4^x+2^{-3}=2^x$		+		

2.16. **В**

Уравнение	$\sqrt{2(x+4)}+x=0$	$\sqrt{x^2-2x+1}=3$	$x=\sqrt{2(x+4)}$	$\log_2 x + \log_2(x-2)=3$
$2^{x^2}=4^{x+4}$		+		
$x^2=2\lvert x+4\rvert$		+		
$\log_2(2-x)+\log_2(-x)=3$	+			
$2\log_2 x-1=\log_2(x+4)$			+	+

■ Справедливость тождеств

2.17. **А**

Тождество	$a \geq 0,\ b \geq 0$	$a > 0,\ b > 0$	a, b — любые числа
$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$	+		
$\lg ab=\lg a+\lg b$		+	
$\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}$			+
$(ab)^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{2}{3}}$		+	

Б

Тождество	$a \geq 0,\ b > 0$	$a > 0,\ b > 0$	a, b — любые числа	a — любое число, $b \neq 0$
$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	+	+		
$\lg\frac{a}{b}=\lg a-\lg b$				
$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$				+
$2^{a-b}=\frac{2^a}{2^b}$			+	

В

Тождество	a — любое число	$a \geq 0$	$a > 0$	$a \neq 0$
$\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{a}$		+		
$\lg a^2 = 2\lg\lvert a\rvert$				+
$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$	+			
$\lg a^3 = 3\lg a$			+	

Самостоятельные работы

■ Степени и корни

2.18. **А** $\dfrac{16}{9}$. **Б** 8. **В** $\sqrt{\dfrac{y}{x}}$.

2.19. **А** 1) $\dfrac{x^2}{y^2}$; 2) $-3\sqrt{x}$.

Б 1) $a^{-\frac{169}{60}}b^{-\frac{31}{30}}$; 2) $5^{\frac{1}{4}}$.

В 1) $-\dfrac{3b}{2a}$ при $ab > 0$ и $\dfrac{5b}{2a}$ при $ab < 0$; 2) 2.

2.20. **А** 1) -31; 2) 3.

Б 1) 84; 2) $\dfrac{3}{10}\left(\sqrt{5}-5\right)$.

В 1.

■ Логарифмы

2.21. **А** 1) $\dfrac{10}{3}$; 2) 250.

Б $17^{\frac{2}{3}} + 7^{\frac{1}{2}}$.

В $4 \cdot 3^{-\frac{1}{2}} + 6^{\frac{2}{3}}$.

2.22. **А** $\dfrac{3}{2}a$.

Б $3 - 3a$.

В $-a - 1$.

■ Показательные уравнения

2.23. **А** 1) а) $\dfrac{9}{4}$; б) 3; 2) $\dfrac{3}{2}$; 3) 1.

Б 1) а) 2; б) 3; 2) 3; 3) 0; 4) $a < 1$, нет решений; $a = 1$, одно решение; $a > 1$, два решения.

В 2) 2; 3) 2.

■ Логарифмические уравнения

2.24. **А** 1) –3; 2) 5; 3; 3) 27.

Б 1) 13; 2) 8; 3) $\sqrt{0,1}; \sqrt[3]{10}$.

В 1) 3; 2) 3; 3) 0,25.

Контрольные тесты с выбором ответа

■ Вычисление значения выражения

2.25. **А** в. **Б** б. **В** г.

2.26. **А** г. **Б** а. **В** в.

2.27. **А** г. **Б** в. **В** г.

2.28. **А** б. **Б** б. **В** в.

2.29. **А** г. **Б** в. **В** а.

2.30. **А** б. **Б** б. **В** б.

■ Сравнение значений выражений

2.31. **А** в. **Б** б. **В** в.

2.32. **А** в. **Б** а. **В** а.

2.33. **А** г. **Б** а. **В** а.

■ Осмысленность выражений

2.34. **А** в. **Б** б. **В** г.

Глава 3

Тренажеры

■ Прямые в пространстве

3.9. Наибольшее количество точек пересечения, очевидно, равно $2n$. Наименьшее количество равно $n - 1$.

3.11. $\frac{a}{3}$.

Параллельность прямых и плоскостей

В **3.32.** $\frac{\sqrt{2}}{2} \le |KL| \le \sqrt{3}.$

Перпендикулярность прямых и плоскостей

Б **3.46.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{3}}.$

В **3.49.** $\angle C = 150^\circ$, $\angle B = \angle D = 75^\circ$. **3.51.** Существует. **3.52.** Существует.

Расстояния

А **3.57.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ и $\sqrt{2}.$

Б **3.60.** а) 1; б) $13 - 8\sqrt{2}.$

В **3.64.** 4.

Теорема о трех перпендикулярах. Угол между прямой и плоскостью

А **3.67.** $\arccos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{12h^2 + a^2}{3h^2 + a^2}}.$

Б **3.70.** Не существует. **3.71.** $\alpha = \pi - \arccos\frac{a^2}{a^2 + 4h^2}.$

Указание. Провести плоскость через диагональ BD перпендикулярно ребру SC. Получим треугольник BDM. Искомый угол α равен углу M в этом треугольнике. **3.72.** $\sqrt{2}\cos\alpha.$

3.74. $\sqrt{d^2 - \frac{3a^2}{7 + 4\sqrt{3}}}.$

В **3.77.** $\frac{\pi}{3}.$

Проектирование

А **3.85.** Не обязательно.

Б **3.87.** а) Может. б) Может.

В **3.110.** Параллелограмм.

Изображение пространственных фигур и построение сечений

А **3.111.** Может.

Матричные тесты

■ Взаимное расположение прямых

А

3.133.

Условие	b ⦷ c	$b \otimes c$	$b \oslash c$
a ⦷ b, $a \oslash c$		+	+
$a \otimes b$, $a \oslash c$	+	+	+
a ⦷ b, $a \otimes c$	+	+	+
$a \otimes b$, $a \otimes c$	+	+	+
a ⦷ b, a ⦷ c	+		

■ Взаимное расположение прямых и плоскостей

Б

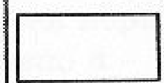
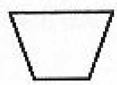
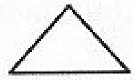
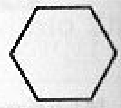
3.134.

	$\parallel$	$\perp$	Образуют угол, отличный от 0 и 90°
Прямая PQ и плоскость $ABCD$		+	
Плоскости ABD и QBC			+
Прямая AB и плоскость DCQ	+		
Плоскости ABD и BPC			+
Плоскости APC и BPD		+	
Прямые AB и CQ			+

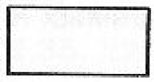
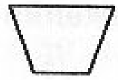
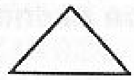
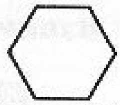
■ Изображение пространственных фигур

Б

3.135.

Пространственная фигура				
Куб	+			+

Окончание таблицы

Пространственная фигура				
Треугольная пирамида	+		+	
Четырехугольная пирамида с произвольным основанием	+	+	+	
Прямоугольный параллелепипед	+			+
Пятиугольная пирамида			+	+

В

3.136

Пространственная фигура	Существует точка, равноудаленная от всех		
	ребер	граней	вершин
Куб	+	+	+
Правильный тетраэдр	+	+	+
Пирамида с квадратом (сторона 1) в основании и высотой длины 1, совпадающей с боковым ребром		+	+
Правильная треугольная призма с ребром основания в два раза меньшим, чем боковое	+	+	+

3.137

Исходная фигура — треугольник	Изображение центра тяжести		
	Середина стороны	Точка пересечения высот	Точка пересечения срединных перпендикуляров
Правильный	+	+	+
Прямоугольный	+		
Остроугольный, но правильный	+		

Самостоятельные работы

■ Взаимное расположение прямых и плоскостей

А **3.138.** $|MF| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$.

Б **3.139.** $d = 6$.

В **3.140.** Прямые параллельны CD, лежат в плоскостях XCD и YCD соответственно и равноудалены от AB и CD.

■ Расстояния

А **3.141.** $2\sqrt{6}$. **3.142.** 12.

Б **3.143.** 7. **3.144.** 90°; 45°.

В **3.145.** $\frac{\sqrt{850}}{3}$. **3.146.** $2\sqrt{13}$.

Контрольные тесты с выбором ответа

А **3.150.** г. **3.151.** б. **3.152.** б. **3.153.** в. **3.154.** г. **3.155.** в.

Б **3.156.** б. **3.157.** г. **3.158.** в. **3.159.** а.

В **3.160.** г. **3.161.** б. **3.162.** в. **3.163.** г. **3. 164.** г. **3.165.** в. **3.166.** а. **3.167.** в.

Глава 4

Тренажеры

■ Правило произведения

А **4.1.** 1) 4 500; 4) $15^3 \cdot 10^4$; 6) $25^6 \cdot 90$; 7) $15 \cdot 14^4$; 9) $20^5 \cdot 26$; 15^{15}. **4.2.** $5 \cdot 26^2$. **4.3.** 8. **4.4.** 1 200; **4.11.** 1) 2^3; 2) 2^{12}. **4.12.** 24^7. **4.13.** 3^{10}.

Б **4.17.** 45. **4.19.** 6^5. **4.20.** $5 \cdot 4^6$. **4.21.** $(C_{10}^3)^3$.
4.22. 1) $9 \cdot 10^4 \cdot 5$; 2) $7 \cdot 8^5$; 3) $9 \cdot 10^3 \cdot C_5^2$; 4) 73 314; 5) 316 071; 6) $9 \cdot 10^4$; 7) $4 \cdot 5^5$.

В **4.26.** 1) а) 16; б) 144; в) 25. **4.29.** 10. **4.30.** $18 \cdot 10^5$.

■ Размещения и перестановки

А **4.34.** 1) $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$; 2) $10 \cdot 9 \cdot 8$; 3) $7!$; 4) $2 \cdot 10^4 \cdot 5^4$; 5) 35 715; 6) 4 320; 7) 60; 10) 25^5. **4.35.** 325. **4.39.** 15 249 024. **4.40.** $88 + 88 \cdot 87 + 88 \cdot 87 \cdot 86 + \ldots + 88!$

Б **4.42.** 1 512 000. **4.47.** $8!$

В **4.49.** 356. **4.50.** 1 624. **4.51.** $3!5!6!8!$ **4.52.** 96 768. **4.53.** 12 096. **4.55.** 1) 216. **4.57.** $C_{36}^9 \cdot C_{27}^9 \cdot C_{18}^9$.

■ Сочетания

А **4.58.** $C_8^4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$. **4.60.** 330. **4.61.** 2) 8 100; 4) 210; 7) 120.

Б **4.63.** 1) $8 \cdot 55 \cdot 9^3$; 2) $1574 \cdot 9^3$; 3) 73 314. **4.64.** $(2^{10} - 1)(2^{20} - 1) \times (2^7 - 1)$. **4.66.** 1 234 800. **4.68.** 35. **4.70.** 30. **4.71.** 48.

В **4.73.** $C_{32}^8 \cdot C_{24}^8$. **4.76.** 4 752. **4.77.** 36. **4.78.** $C_{32}^{10} \cdot C_{22}^{10} \cdot C_{12}^{10}$.

■ Многочлены

4.80. **А** 1) $(n+2)2^{n-1}$; 2) $(n+1)2^n$; 3) $\dfrac{n \cdot 2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

Б 1) 0; 2) 0 при $n > 1$ и 1 при $n = 1$.

В 1) C_{2n}^n; 2) 0 при нечетном n и $(-1)^m C_n^m$ при $n = 2m$; 3) -2^{50}.

4.81. **А** До приведения 2^{10}, после приведения 11.

В До приведения 4^7, после приведения 21.

4.82. **Б** $n = 2$.

■ Геометрические конфигурации

4.84. **А** C_{12}^4. **4.85.** 1) $6C_8^2 + 8C_6^2$; 2) $C_8^2 \cdot C_6^2$; 3) $C_8^2 \cdot C_6^2$.

4.86. **А** 1) $\dfrac{n(n-3)}{2}$; 3) $C_{m+1}^2 \cdot C_{n+1}^2$; 4) $2C_n^2$.

4.87. 2) 15; 3) 14.

Б **4.88.** 1) C_n^2. **4.89.** 1) $nC_m^2 + mC_n^2$; 2) $C_m^2 \cdot C_n^2$; 3) $C_m^2 \cdot C_n^2$. **4.90.** 1) C_n^4; 2) $C_{m+1}^2 \cdot C_{n+1}^2 \cdot C_{k+1}^2$; 3) $210 - (m^2 - 5m + 10)(n^2 - 7n + 21)$.

4.91. 1) $(n^2 + n + 2)/2$; 2) $\dfrac{n^3 + 5n + 6}{6}$; в) 2^n.

В **4.92.** 4. **4.94.** $pC_{n-p}^2 + (n-p)C_p^2$. **4.95.** $9n^3 - 29n^2 + 55n - 31$. **4.96.** C_n^2. **4.97.** $C_n^3 + 2C_n^2 + n$.

Матричные тесты

4.98. А

Условие	Количество вариантов			
	16	18	45	81
Лузы и шары различные				+
Шары различные, хотя бы одна луза пустая			+	
Шары различные, вторая луза пустая	+			
Шары различные, луза либо пустая, либо в нее попадает ровно два шара		+		

Б

Условие	Количество вариантов			
	15	36	60	42
Шары и лузы различные, пустых луз нет		+		
Шары и лузы различные, в одной из луз один шар			+	
Шары и лузы различные, одна луза пустая				+
Шары одинаковые, лузы разные	+			

В

Условие	Количество вариантов			
	5	9	12	6
Шары одинаковые, лузы различные, первая луза пустая	+			
Шары одинаковые, лузы различные, одна луза пустая		+		
Шары одинаковые, лузы разные, в одной лузе не может быть двух шаров			+	

Окончание таблицы

Условие	Количество вариантов			
	5	9	12	6
Шары одинаковые, лузы разные, каждая луза или пустая или в нее попадает четное число шаров				+

4.99. **А**

Условие	Количество вариантов			
	$(10\cdot 9\cdot 8)^2$	$20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15$	10^6	20^6
На каждый день караульный назначается независимо от предыдущих назначений				+
Все караульные различны		+		
В первый день назначается мушкетер, а затем мушкетеры и гвардейцы чередуются			+	
В первый день назначается гвардеец, а затем мушкетеры и гвардейцы чередуются. Все караульные различны	+			

Б

Условие	Количество вариантов			
	$(10\cdot 9\cdot 8)^2$	$2(10\cdot 9\cdot 8)^2$	$2\cdot 10^6$	$5C_{20}^5\cdot\frac{6!}{2}$
На каждый день караульный назначается независимо от предыдущих назначений, при этом мушкетеры и гвардейцы чередуются			+	
Мушкетеры и гвардейцы чередуются. Все караульные различны		+		

Окончание таблицы

Условие	Количество вариантов			
	$(10\cdot9\cdot8)^2$	$2(10\cdot9\cdot8)^2$	$2\cdot10^6$	$5C_{20}^5\cdot\frac{6!}{2}$
Первые три дня в карауле стояли мушкетеры, следующие три дня —гвардейцы	+			
Ровно один человек был в карауле дважды, остальные не повторялись				+

В

Условие	Количество вариантов			
	$C_{20}^3\cdot\left(\frac{6!}{2^3}+\frac{6!}{3!\cdot2}+\frac{6!}{4!}\right)$	$2(10\cdot9\cdot8)^2$	$C_{20}^3\cdot\frac{6!}{2^3}$	$2\cdot10^6$
Мушкетеры и гвардейцы были в карауле ровно по три дня. Караульные могли повторяться				+
Мушкетеры и гвардейцы были в карауле ровно по три дня. Все караульные различны		+		
На одной неделе в карауле были три разных человека, каждый по два дня (не обязательно подряд)			+	
Разных караульных за неделю было ровно трое	+			

Самостоятельные работы

■ Правило произведения

А **4.100.** 1) 15; 2) 20; 3) 25; 4) 20; 5) 10/9; 6) 720; 7) 125; 8) 125. **4.101.** 1 080. **4.102.** 6 600. **4.103.** 3 150.

Б **4.104.** 1) 2 916; 2) 2 025; 3) 900; 4) 64 800; 5) 1 764; 6) 4 050; 7) 5 040; 8) 51 840; 9) 6 480; 10) 47 040. **4.105.** $30^3\cdot28^3\cdot32^2$. **4.106.** 119.

В 4.107. 216 000. 4.108. 72. 4.109. 54. 4.110. 36.

Размещения

А 4.111. 24. 4.112. 40 320. 4.113. 362 880.

Б 4.114. 120. 4.115. 1) $3^4 = 81$; 2) 4; 3) 24; 4) $4^4 - 3^4 = 175$; 5) 324.

В 4.116. 1) $4 \cdot 3^3 = 108$; 2) 16; 3) 16; 4) 54; 5) 64.

Сочетания

А 4.117. 9 200. 4.118. 49 500.

Б 4.119. 150.

В 4.120. 8 817 900.

Контрольные тесты с выбором ответа

Правило произведения

А 4.121. б.

Б 4.122. в.

В 4.123. б.

Повторные испытания

А 4.124. г.

Б 4.125. а.

В 4.126. б.

Размещения

А 4.127. а.

Б 4.128. в.

В 4.129. б.

Перестановки

А 4.130. б.

Б 4.131. в.

В 4.132. б.

■ **Сочетания**

А **4.133.** в.

Б **4.134.** а.

В **4.135.** а.

Глава 5

Тренажеры

■ **Задание точек координатами**

Б **5.2.** 1. в) $x = 3$; г) $[-1;\ 8]$. 2. б) $|x| = |y|$; в) $\left[\begin{array}{l} x < 0, \\ x > 2; \end{array}\right.$

г) $x^2 + (y - 2)^2 = 9$. 3. а) $P'(-1;\ 2;\ -4)$; б) $P'(-4;\ -1;\ -3)$;

в) $P'(0;\ 1{,}5;\ -4)$; г) $\begin{cases} x < 0, \\ y < 0, \\ z > 0. \end{cases}$

В **5.3.** 1. б) $|x - 7| < |x + 4| \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{2}$; в) $(-\infty;\ 1{,}5]$, $[5{,}5;\ +\infty)$;

г) $(-\infty;\ -1]$, $[2;\ +\infty)$. 2. а) $|x| > 2|y|$;

б) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = (x + 3)^2 + (y - 3)^2 \Leftrightarrow 5x - y + 5 = 0$;

в) $2 \le x^2 + y^2 \le 6$. 3. а) $y = \pm x$; в) $6x + 10y + 2z - 1 = 0$;

г) $x^2 + z^2 = 36$.

■ **Действия над векторами и их координатами**

Б **5.8.** $\overline{AK} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$; $\overline{KP} = \mathbf{c} - \dfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$; $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$.

В **5.9.** 2) $\mathbf{b} - \mathbf{a}$; 3) 458. **5.10.** 1) $2\sqrt{3}$;

2) $K_1K_2 = \sqrt{(CD^2 + BC^2)/4} = \sqrt{5}$.

■ **Решение простейших геометрических задач**

А **5.13.** $A(-8;\ -2)$, $B(0;\ 6)$, $C(2;\ 6)$, $AK = 4\sqrt{2}$.

Б **5.16.** $y = 1$. **5.17.** Нет. **5.18.** $(-1;\ -2;\ 0)$.

■ **Скалярное произведение векторов**

А **5.19.** 1) (0; 12; 24); 2) (354; –590; –118). **5.20.** 1) 16; 3) 469.

Б **5.22.** (9; 0; –6). **5.23.** 4) 1,25.

В 5.25. $\sqrt{5}$. 5.26. $\dfrac{20}{\sqrt{449}}$; 5.27. $\arccos\dfrac{1}{3}$.

■ Уравнения прямой и плоскости

А 5.29. 5) $x = 3$.

Б 5.30. 2) $y + 1 = 0$; 3) $4x + y - 6z + 11 = 0$; 4) $3x - z - 5 = 0$.

В 5.31. 1) $\left(\dfrac{26}{7}; \dfrac{40}{7}\right)$; 2) (4; 5,5);

■ Векторные уравнения прямой и плоскости

А — Б 5.32 4) $P(0; 0; 5)$ и $Q(10; 15; 0)$;

7) $\overrightarrow{MP} = t\overrightarrow{MN}$, где $\overrightarrow{MP} = \left(x - \dfrac{1}{4}; y - \dfrac{1}{6}; z\right)$; $\overrightarrow{MN} = \left(\dfrac{3}{4}; \dfrac{5}{6}; 1\right)$.

Б — В 5.33. 1) $x + y - 3 = 0$; 2) $x - 2y + 2z - 3 = 0$;

3) $-x + y + 1 = 0$; 4) $\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{8}{3}; \dfrac{7}{3}\right)$; 5) $O\left(\dfrac{11}{6}; \dfrac{23}{6}; \dfrac{5}{6}\right)$; 6) $x - y + 2 = 0$;

7) $\left(x - \dfrac{11}{6}\right)^2 + \left(y - \dfrac{23}{6}\right)^2 + \left(z - \dfrac{5}{6}\right)^2 = \dfrac{35}{4}$; 8) $3y - z + 2 = 0$.

Матричные тесты

5.34. **А**

Описание прямой	Уравнение прямой			
	$-0{,}5x + y = 1$	$x - 2y = 2$	$3x + 2y = 2$	$4x - 6y = 6$
Проходит через точку $A(0; -1)$		+		+
Не имеет точек в IV четверти	+		+	
Проходит через точку $A(0; 1)$	+		+	
Пересекает ось ординат ниже начала координат		+		+

Б

Описание прямой	Уравнение прямой			
	$x + 2y = 2$	$2x - y = 4$	$2x - y = -2$	$x + 2y = 4$
Параллельна прямой $y = 2x$ и проходит через точку $R(0;\ 2)$			+	
Проходит через точку $P(2;\ 0)$ и перпендикулярна прямой $y = 2x$	+			+
Проходит через точки $P(2;\ 0)$ и $Q(3;\ 2)$		+		
Проходит через точку $Q(-2;\ 3)$ и параллельна прямой $x + 2y = 0$				

В

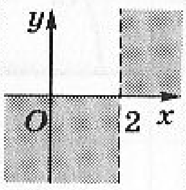
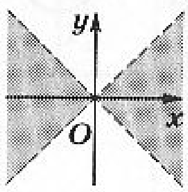
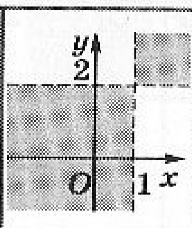
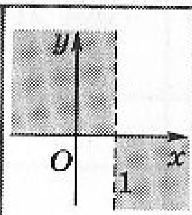
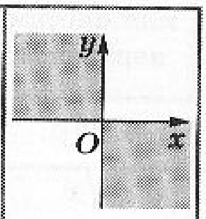
5.35.

Описание плоскости	Уравнение плоскости			
	$x = 7$	$x + y + z = 1$	$x + y = 0$	$x + y + 2z = -1$
Параллельна одной из координатных плоскостей	+			
Отсекает на координатных осях равные отрезки		+		
Содержит одну из осей координат			+	
Одна из координат точек пересечения с осями отрицательна				+

■ Задание точечных множеств на плоскости

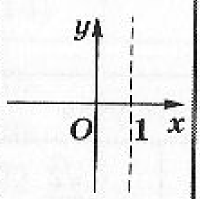
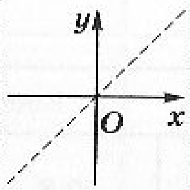
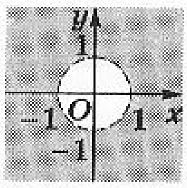
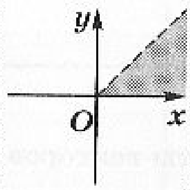
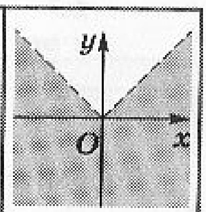
А

5.36.

Неравенство					
$(x-1)\times$ $\times(y-2)>0$			+		
$(x-2)\,y>0$	+				
$(x-y)\times$ $\times(x+y)>0$		+			
$xy<0$					+
$(x-1)y<0$				+	

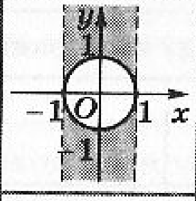
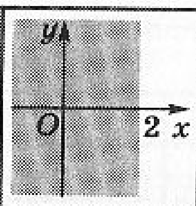
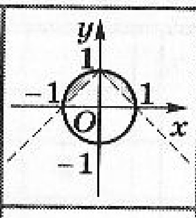
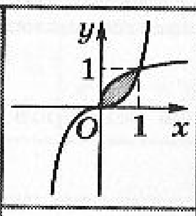
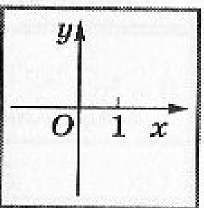
Б

5.37.

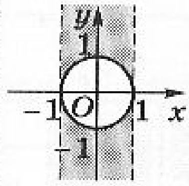
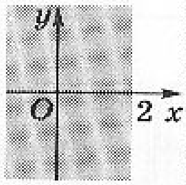
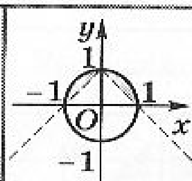
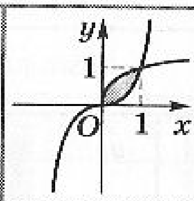
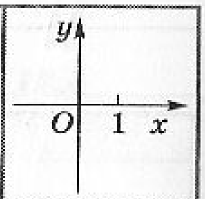
Уравнение или неравенство					
$\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{y}$		+			
$\ln x \ge \ln y$				+	
$y \le \lvert x\rvert$					
$(1-x)^2 \le 0$	+				+
$y^2 \ge 1-x^2$			+		

В

5.38.

Уравнение, неравенство или система неравенств					
$\begin{cases} x^2+y^2 \le 1; \\ \lvert x\rvert + y \ge 1 \end{cases}$			+		

Окончание таблицы

Уравнение, неравенство или система неравенств					
$\begin{cases} y > x^3; \\ y < \sqrt{x} \end{cases}$				+	
$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1; \\ \lvert x \rvert \leq 1 \end{cases}$	+				
$(1 - x)^2 + y^2 \leq 0$					+
$\sqrt{2-x} = \dfrac{2-x}{\sqrt{2-x}}$		+			

■ Скалярное произведение векторов

А

5.39.

Координаты векторов	Косинус угла			
	-1	0,8	$\dfrac{\sqrt{2}}{10}$	$\dfrac{3}{2\sqrt{35}}$
(3, –1) и (1, 2)			+	
(–2, 2) и (6, –6)	+			
(0, 0, 2) и (0, 3, 4)		+		
(2, 3, –1) и (3, –1, 0)				+

Б

5.40.

Координаты векторов	Угол между векторами			
	$\dfrac{\pi}{2}$	180°	$\dfrac{3\pi}{4}$	60°
(1,0) и (–2, 2)			+	
(3, 4) и (–16, 12)	+			

Окончание таблицы

Координаты векторов	Угол между векторами			
	$\frac{\pi}{2}$	180°	$\frac{3\pi}{4}$	60°
$(-2, -2)$ и $(5, 5)$		+		
$(0, 1, 1)$ и $(1, 0, 1)$				+

B

5.41.

Векторы	$\angle BOC$	Все три угла равны	$\angle AOC$	$\angle AOB$
$\overrightarrow{OA} = (2, 1)$ $\overrightarrow{OB} = (-2, 1)$ $\overrightarrow{OC} = (2, -1)$	+			
$\overrightarrow{OA} = (3, 0, 0)$ $\overrightarrow{OB} = (-2, 0, 0)$ $\overrightarrow{OC} = (0, 0, 14)$				+
$\overrightarrow{OA} = (3, 0, 0)$ $\overrightarrow{OB} = (0, 5, 0)$ $\overrightarrow{OC} = (0, 0, 7)$		+		
$\overrightarrow{OA} = (11, 0)$ $\overrightarrow{OB} = (0, 3)$ $\overrightarrow{OC} = (-12, 12)$			+	

■ Декартовы координаты в пространстве

A

5.42.

Описание множества точек	Уравнение (система уравнений)			
	$\lvert x \rvert = 1$	$\begin{cases} x = 1, \\ y = 1 \end{cases}$	$x = y = z$	$x^2 - y^2 = 0$
Прямая, проходящая через начало координат и точку $P(1; 1; 1)$			+	
Пара параллельных плоскостей, перпендикулярных оси Ox	+			

Окончание таблицы

Описание множества точек	Уравнение (система уравнений)			
	$\|x\| = 1$	$\begin{cases} x = 1, \\ y = 1 \end{cases}$	$x = y = z$	$x^2 - y^2 = 0$
Прямая, проходящая через точку $P(1;\ 1;\ 1)$ и параллельная оси Oz		+		
Пара плоскостей, пересекающихся по оси Oz				+

Б

5.43.

Описание плоскости	Уравнение			
	$x + y + z = 1$	$x - y = 0$	$x + z = 1$	$y + z = 1$
Плоскость параллельна оси Ox				+
Плоскость высекает на всех трех осях единичные отрезки	+			
Точки плоскости равноудалены от точек $P(1;\ 0;\ 0)$ и $Q(0;\ 1;\ 0)$		+		
Плоскость перпендикулярна плоскости $x + y - z = 0$			+	+

В

5.44.

Описание множества	Уравнение (система уравнений)			
	$x + y + 1 = 0,$ $x - y + 2z = 4$	$x + y + 1 = 0,$ $5x + 5y = 16$	$x^2 + y^2 + z^2 = 7,$ $x \geq 0$	$x^2 + y^2 + z^2 = 7$
Полусфера			+	
Пара параллельных плоскостей		+		

Описание множества	Уравнение (система уравнений)			
	$x + y + 1 = 0,$ $x - y + 2z = 4$	$x + y + 1 = 0,$ $5x + 5y = 16$	$x^2 + y^2 + z^2 = 7,$ $x \geq 0$	$x^2 + y^2 + z^2 = 7$
Пара перпендикулярных плоскостей	+			
Сфера				+

Самостоятельные работы

Координаты точек и векторов

А **5.45.** 1) $\left(\frac{1}{2}; -4; 3\right)$; 3) $(-2; -12; 8)$.

Б **5.46.** 1) $\left(\frac{2}{3}; -\frac{10}{3}; \frac{10}{3}\right)$; 3) $D\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{16}{3}\right)$; 4) $2\sqrt{2{,}8}$.

В **5.47.** 1) $\left(\frac{2}{3}; 0; 0\right)$; 3) $D(72{,}5; -21{,}5)$; 4) $\frac{32}{\sqrt{94}}$.

Разложение вектора

А **5.48.** 1) $B_1(2; 0; 7)$, $D_1(0; 2; 7)$, $B(2; 0; 0)$, $C(2; 2; 0)$;
2) $\overrightarrow{AD} + 0{,}5(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1})$; 3) $(1; 2; 3{,}5)$.

Б **5.49.** 1) $B(-1; 1; 2)$, $D(1; -1; 2)$; 2) $\overrightarrow{AM} = 0{,}5(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) - \overrightarrow{OA}$;
3) $\overrightarrow{AM} = (-1; -1; 4)$.

В **5.50.** 1) $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $B_1(2; 1; 4)$, $C_1(2; 2; 4)$;
2) $\overrightarrow{A_1M} = 0{,}5(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AA_1}$; 3) $\overrightarrow{A_1M} = (0{,}5; 0{,}5; -4)$.

Скалярное произведение веторов

А **5.51.** 1) $KL = \sqrt{1{,}5}$; $KM = \sqrt{1{,}5}$; $ML = \sqrt{0{,}5}$; $\angle MKL \approx 33{,}6^\circ$;
3) $\sqrt{1{,}5}$.

Б **5.52.** 1) $\frac{1}{3}$, 60°; 2) $\approx 48{,}2^\circ$; 3) $\frac{\sqrt{1770}}{216}$.

В **5.53.** 1) $E_1C_1 = \sqrt{3}$; $AC_1 = AE_1 = 2$; $\angle E_1AC_1 \approx 51{,}3^\circ$; 2) $\approx 67{,}4^\circ$;
3) 2.

■ Уравнения прямой и плоскости

А **5.54.** 2) $\begin{cases} y = 3, \\ z = 0; \end{cases}$ 3) $x - y + 1 = 0.$

Б **5.55.** 1) $\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ z = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 2, \\ y - z - 3 = 0. \end{cases}$

В **5.56.** 1) $\begin{cases} x = 2, \\ y = 3; \end{cases}$ 3) $x + y - 2 = 0.$

Контрольные тесты с выбором ответа

■ Координаты точки

А **5.57.** г.

Б **5.58.** в.

В **5.59.** г.

■ Расстояния

5.60. **А** б. **Б** в. **В** б.

■ Разложение вектора

5.61. **А** б. **Б** в. **В** а.

■ Действия над векторами

5.62. **А** в. **Б** б. **В** б.

■ Скалярное произведение векторов

5.63. **А** в. **5.64.** **Б** в. **5.65.** **В** б.

■ Уравнение плоскости

5.66. **А** в. **Б** г. **В** а.

Глава 6

Тренажеры

■ Вычисление значений тригонометрических функций

6.4. **А** 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 13) $\sqrt{3}$; 18) $-\sqrt{3}$; 23) 1; 28) $-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}$.

Б 1) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$; 6) $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 8) $-\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$; 10) 1; 12) $\frac{1}{2}$.

В 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) $4\frac{11}{12}\pi$; $2\frac{1}{12}\pi$; 5) 14; 7) 0.

■ Связь между значениями тригонометрических функций

6.5. **А** 2) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha = 1$; 4) $\sin\alpha = \frac{4}{5}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}, \operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$;

6) $\varnothing$; 8) $\cos\alpha = 0$, $\operatorname{tg}\alpha$ не определен, $\operatorname{ctg}\alpha = 0$;

11) $\cos\alpha = \frac{3}{5}, \operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}, \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}$;

13) $\operatorname{ctg}\alpha = -2, \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$;

15) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}, \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Б 1) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$;

3) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$; 6) $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha = 0$,

$\operatorname{ctg}\alpha$ не определен; 8) $\operatorname{tg}\alpha = -7, \cos\alpha = -\frac{1}{5\sqrt{2}}, \sin\alpha = \frac{7}{5\sqrt{2}}$;

10) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}, \operatorname{ctg}\alpha = 4, \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}, \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

В 1) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}, \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

3) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{8}}, \operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{8}$;

5) $\sin\alpha = \frac{3}{5}, \cos = \frac{4}{5}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}, \operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$;

7) $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}}, \sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}, \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{3}$;

13) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}, \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{15}}, \operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{15}$.

6.6. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$. **6.7.** $-\frac{2}{3}$.

■ Определение знака тригонометрических выражений

6.9. **А** 2) «+»; 4) «+»; 5) «–»; 7) «+»; 10) «+».

Б 1) «–»; 3) «–»; 5) «–»; 7) «+»; 9) «–»; 10) «+».

В 1) «+»; 3) «+»; 5) «+».

■ Использование формул приведения

6.10. **А** 5) $\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$; 7) 1; 8) $\cos^2\alpha$.

6.11. **Б** 1) $\sin\frac{11\pi}{6}$, $\mathrm{ctg}\,270°$, $\mathrm{tg}\frac{7\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{3}$; 2) $\cos(-600°)$, $\cos 150°$, $\sin 5\pi$, $\mathrm{ctg}\frac{7\pi}{2}$; 4) $\mathrm{ctg}\,47°$, $2\sin^2\frac{5\pi}{4}$, $\mathrm{tg}\,46$; 6) $\cos 3$, $\cos 4$, $\cos 2$, $\cos 1$; 7) $\mathrm{tg}\sqrt{3}$, $\sin\frac{5\pi}{4}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 2$.

■ Преобразования тригонометрических выражений

А **6.13.** 1) да; 2) нет; 3) нет; 4) да; 5) нет; 6) да; 7) да; 8) да; 9) да; 10) нет.

Б **6.14.** 1) 1; 2) 1; 3) 0; 4) $\cos\alpha$; 5) $\frac{2}{\cos\beta}$; 7) 1; 9) 1; 10) $\cos^4\alpha$.

В **6.16.** 1) $\cos\alpha$; 2) $-\sin\alpha\cos\beta$. **6.17.** 1) -27; 2) -1.

А **6.18.** 3) $\cos 35°$; 5) $\cos 4\alpha$; 7) 2; 9) $\frac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha$.

Б **6.19.** 1) $-\frac{1}{5}$; 2) $\frac{24}{25}$; 3) 0,8 или $-0{,}6$; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\frac{17}{81}$.

В **6.21.** 1) $\frac{7}{25}$; 2) -1; 3) $\frac{1}{8}$; 4) -1; 5) $-\frac{1}{2}$; 6) 4.

А **6.22.** 1) 0; 2) $2\sin 14°$; 4) $\cos\frac{\pi}{30}$; 5) 0; 6) $\mathrm{ctg}\alpha$; 9) $\frac{3}{2}$; 10) 2.

Б **6.23.** 3) 0; 7) $-\frac{7}{25}$; 8) -1; 9) 4; 10) $-\frac{1}{3}$.

В **6.24.** 1) -4; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 2; 4) $-\frac{1}{4}$; 5) -2.

Б **6.28.** 1) 1; 2) 4; 3) -4; 4) 0.

В **6.29.** 2) $\frac{3}{4}$; 3) $-\frac{7}{25}$; 4) $\frac{1}{16}$. **6.30.** 1) $a > b$; 2) $a = b$; 3) $a > b$; 4) $a < b$; 5) $a < b$. **6.31.** 1) 1; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{3}{16}$; 4) $\frac{8}{\sqrt{3}}$.

■ Тригонометрические уравнения

А **6.32.** 3) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 4) $(-1)^n\frac{\pi}{2}+3\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 6) $33\frac{\pi}{12}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 9) $\varnothing$; 10) $\frac{\pi}{16}+(-1)^n\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 21) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 29) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Б 3) $\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}, n\in\mathbf{Z}$; 4) $\varnothing$; 5) $(\pi n)^2$, $n\in\mathbf{Z}$; 6) $\frac{12}{(-1)^n\pi+6\pi n}$, $n\in\mathbf{Z}$;

8) $\pm\sqrt{\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n}$, $n=1, 2, \dots$; 9) $\varnothing$; 10) $\pm\frac{1}{3}+2n,\ n\in\mathbf{Z}$.

В 1) $\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $\varnothing$; 3) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 4) $\left[\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$;

5) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

А **6.33.** 1) $\frac{4\pi}{3}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{8}$; 5) $\frac{\pi}{6}-1,\ \frac{5\pi}{6}-1$; 6) $-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}$; 7) $\frac{\pi}{6}$;

8) $\operatorname{arctg} 2$; 10) $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}$.

Б **6.34.** 1) $-\frac{\pi}{6}$; 2) $\operatorname{arctg}\left(1-\sqrt{2}\right)$; 3) $-\frac{3\pi}{10}$; 4) $-\frac{\pi}{3}$; 5) $-\frac{\pi}{3}$; 6) $-\sqrt{\frac{5}{3}}$.

6.35. 1) $\frac{\pi}{12}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) 3; 4) $\frac{\pi}{2}$. **6.36.** 1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) 0.

В **6.37.** 1) $\frac{3\pi}{5}$; 2) 0; 3) $\frac{5\pi}{12}$; 4) $-\frac{\pi}{9}$; 5) $\varnothing$. **6.38.** 1) $\varnothing$; 2) $\frac{\pi}{4}$.

6.39. 1) Не существует; 2) $-\frac{\pi}{2}$.

6.40. **А** 1) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 3) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 9) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbf{Z}$;

10) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, \pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 13) $\frac{\pi n}{2}, \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$;

14) $\frac{\pi n}{5},\ \frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbf{Z}$; 16) $\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 17) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}2+\pi n$,

$n\in\mathbf{Z}$; 18) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}0{,}25+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 19) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$;

20) $0,\ 2,\ \frac{\pi}{2}$.

Б 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4}+\pi n, \operatorname{arctg}2+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$;

3) $-\frac{\pi}{3}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$;

5) $\operatorname{arctg}\left(1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 6) $\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbf{Z}$; 7) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$;

8) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 9) $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{3+2\sqrt{3}}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$;

10) $-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

В 1) $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}, \frac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbf{Z}$;

3) $\pi+2\pi n$; $-2\operatorname{arctg}5+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbf{Z}$; 5) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

■ Решение простейших тригонометрических неравенств

6.41. **А** 1) $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbf{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) πn, $n \in \mathbf{Z}$;

4) $\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 5) $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n; \frac{13\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$;

7) $\left(\arcsin\frac{1}{4}+2\pi n; \pi(2n+1)-\arcsin\frac{1}{4}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$;

9) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{11\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$;

12) $\left(\arcsin\frac{1}{5}+\pi+2\pi n; 2\pi-\arcsin\frac{1}{5}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

■ Тригонометрические функции

6.42. **А** 1) π; 3) π; 4) π; 5) $\frac{2\pi}{3}$; 6) 4π; 7) 3π; 8) π.

Б 1) 2π; 2) π; 3) π; 4) 8; 5) 2π; 6) 2π; 7) 2π; 8) π.

В 1) 20π; 2) π; 3) 60; 4) непериодическая; 5) 70; 6) 20π; 7) π; 8) непериодическая.

■ Графическое решение тригонометрических уравнений и неравенств

А **6.44.** 1) 2; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) 1; 6) 2.

Б **6.45.** 1) $\left(\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right)$; 2) $\left[-\pi; -\frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{6}; \pi\right]$; 3) $\left(\frac{7\pi}{3}; 4\pi\right)$;

4) $\left[-2\pi; -\frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$; 5) $[2\pi; 3\pi]$; 6) $\left[0; \frac{7\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{23\pi}{12}; \frac{31\pi}{12}\right)$.

В **6.46.** 5) $\left(-\arccos\frac{1}{4}+2\pi n; \arccos\frac{1}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$;

6) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n; 2\pi n\right) \cup \left(2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$.

Матричные тесты

■ Вращательное движение

6.46. **А**

Координаты точек $P(t)$ и $P(t')$	Вид симметрии				
	Симметрия относительно прямой $y = x$	Симметрия относительно начала координат	Симметрия относительно оси Ox	Симметрия относительно оси Oy	Симметрия относительно прямой $y = -x$
$t = \frac{2\pi}{3}$, $t' = \frac{5\pi}{6}$					+

Окончание таблицы

Координаты точек $P(t)$ и $P(t')$	Вид симметрии				
	Симметрия относительно прямой $y = x$	Симметрия относительно начала координат	Симметрия относительно оси Ox	Симметрия относительно оси Oy	Симметрия относительно прямой $y = -x$
$t = \frac{\pi}{6},\ t' = \frac{11\pi}{6}$			+		
$t = \frac{\pi}{3},\ t' = \frac{4\pi}{3}$		+			
$t = 0,\ t' = \frac{\pi}{2}$	+				
$t = \frac{\pi}{4},\ t' = \frac{3\pi}{4}$				+	

Б

Координаты точек $P(t)$ и $P(t')$	Вид симметрии				
	Симметрия относительно прямой $y = x$	Симметрия относительно начала координат	Симметрия относительно оси Ox	Симметрия относительно оси Oy	Симметрия относительно прямой $y = -x$
$t = \frac{7\pi}{3},\ t' = -\frac{7\pi}{3}$			+		
$t = \frac{\pi}{6},\ t' = \frac{\pi}{3}$	+				
$t = \frac{\pi}{2},\ t' = \pi$					+
$t = \frac{\pi}{7},\ t' = \frac{8\pi}{7}$		+			
$t = \frac{7\pi}{6},\ t' = -\frac{\pi}{6}$				+	

В

Координаты точек $P(t)$ и $P(t')$	Вид симметрии				
	Симметрия относительно прямой $y = x$	Симметрия относительно начала координат	Симметрия относительно оси Ox	Симметрия относительно оси Oy	Симметрия относительно прямой $y = -x$
$t = -\frac{11\pi}{3},\ t' = \frac{20\pi}{3}$		+		+	
$t = \frac{6\pi}{5},\ t' = -\frac{11\pi}{5}$				+	
$t = \frac{21\pi}{8},\ t' = \frac{15\pi}{8}$					+
$t = \frac{10\pi}{9},\ t' = \frac{7\pi}{18}$	+				
$t = -\frac{15\pi}{4},\ t' = \frac{23\pi}{4}$			+		

■ Тригонометрические функции

6.47. **А**

Тригонометрическая функция	«–»	a	b	$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{a}$
$\sin t_2$			+		
$\cos t_3$	+	+			
$\operatorname{tg} t_4$	+				+
$\operatorname{ctg} t_5$				+	
$\sin t_6$	+		+		

Б

Тригонометрическая функция	«–»	a	b	$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{a}$
$\sin t_4$	+	+			
$\cos t_2$			+		

Тригонометрическая функция	«–»	a	b	$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{a}$
$\operatorname{tg} t_3$	+				
$\operatorname{ctg} t_8$	+			+	+
$\sin t_5$	+		+		

В

Тригонометрическая функция	«–»	a	b	$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{a}$
$\sin\left(t_4 - \frac{\pi}{2}\right)$	+	+	+		
$\cos\left(t_7 + \frac{3\pi}{2}\right)$	+	+			
$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t_6\right)$	+				+
$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - t_2\right)$				+	
$\sin(t_3 - \pi)$	+	+			

■ Тождественные преобразования

6.48. **А**

Выражение	Многочлен от $\sin x$	Многочлен от $\cos x$	Многочлен от $\sin 2x$	Многочлен от $\cos 2x$
$A = \sin x \cos x$			+	
$A = \sin^2 x - \cos^2 x$	+	+		+
$A = \sin^2 x + \sin^2 2x$	+	+		+
$A = \sin x + \sin 3x$	+			
$A = \sin x \sin 3x$	+	+		+

Б

Выражение	Многочлен от $\sin x$	Многочлен от $\cos x$	Многочлен от $\sin 2x$	Многочлен от $\cos 2x$
$A = \sin^2 x \cos^2 x$	+	+	+	+
$A = \cos^2 x - \sin^2 x$	+	+		+
$A = \cos^2 x + \cos 2x$	+	+		+
$A = \cos x + \cos 2x$		+		
$A = \sin x \cos 3x$				

В

Выражение	Многочлен от $\sin x$	Многочлен от $\cos x$	Многочлен от $\sin 2x$	Многочлен от $\cos 2x$
$A = \sin x \cos^2 x$	+			
$A = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$				
$A = 2\cos^2 x - \sin^2 x$	+	+		+
$A = \sin x \cos x \cos 2x$				
$A = \cos x \cos 3x$	+			+

Тригонометрические неравенства

А

6.49.

Дуга	Неравенство				
	$\sin t < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos^2 t > \frac{1}{2}$	$\lvert\sin t\rvert < \frac{\sqrt{2}}{2}$
1	+	+		+	+
2		+			
3		+			
4	+	+	+	+	+
5	+	+	+	+	+
6	+				
7	+				
8	+			+	+

Б

6.50.

Дуга	Неравенство				
	$\sin t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos t > \frac{1}{2}$	$\cos t < -\frac{1}{2}$	$\sin^2 t < \frac{3}{4}$	$\lvert\cos t\rvert > \frac{1}{2}$
1		+		+	+
2					
3					
4			+	+	+
5			+	+	+
6	+				
7	+				
8		+		+	+

6.51.

Интервал	Неравенство				
	$\sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\cos t} > \frac{1}{2}$	$\lvert\sin t\rvert < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos^2 t < \frac{1}{2}$	$\cos t < \frac{1}{4}$
$\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$	+	+		+	
$\left(2\pi; \frac{9\pi}{4}\right)$	+	+	+		
$\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right)$		+		+	
$\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$					+
$\left(\frac{19\pi}{4}; \frac{21\pi}{4}\right)$	+		+		+

B

6.52.

Интервал	Неравенство				
	$\frac{1}{\sin t} < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{\cos t} > -\sqrt{2}$	$\cos t < -\frac{1}{4}$	$\sin t > \lvert\cos t\rvert$	$\cos(t+1) > \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$		+		+	
$\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$	+	+			
$\left(7\pi; \frac{15\pi}{2}\right)$	+				
(6; 7)		+			
$\left(3; \frac{5\pi}{4}\right)$			+		

■ Тригонометрические уравнения

6.53. **A**

Тригонометрическое уравнение	Способ решения уравнения				
	Приведением к квадратному уравнению	Приведением к однородному уравнению	Приведением к уравнению относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$	Разложением на множители	По общим свойствам, графикам
$3\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - \sin x \cos x$		+			
$3\sin x + 5\cos x = 2$			+		
$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$				+	
$3\sin^2 x + \cos x = 1$	+				
$\cos^2 x - \cos^4 4x = 2$					+

Б

Тригонометрическое уравнение	Способ решения уравнения				
	Приведением к квадратному уравнению	Приведением к однородному уравнению	Приведением к уравнению относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$	Разложением на множители	По общим свойствам, графикам
$4\cos^2 x - \sin x\cos x - 1 = 0$		+			
$6\sin x - \cos x = 1$			+		
$4\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$	+				
$\sin^4 x + \sin^6 3x = 2$					+
$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$				+	

В

Тригонометрическое уравнение	Способ решения уравнения				
	Приведением к квадратному уравнению	Приведением к однородному уравнению	Приведением к уравнению относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$	Разложением на множители	По общим свойствам, графикам
$2\sin x - 3\operatorname{tg} x = 1$			+		
$\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 3$	+				
$2\sin x + 3\cos 4x = 5$					+
$3\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 2$	+				
$(\cos x + \sin x)^3 = \sin^3 x$		+			

Самостоятельные работы

■ Значения тригонометрических выражений

6.54. **А** *Вариант 1.* 1) 0; 2) 1. *Вариант 2.* 1) $1-\sqrt{3}$; 2) -1.

Б 1) 0; 2) 5.

В 1) 0; 2) 2.

6.55. **Б** $\frac{7}{16}$.

В $\frac{1}{4}$.

■ Сравнение тригонометрических выражений

6.56. **А** *Вариант 1.* $\sin 200°$, $\sin 160°$, $\sin 40°$, $\sin 120°$, $\sin 80°$.
Вариант 2. $\cos 160°$, $\cos 210°$, $\cos 120°$, $\cos 80°$, $\sin 40°$.

6.57. **А** *Вариант 1.* $\cos 1{,}5$, $\cos 4{,}5$, $\cos 2{,}5$, $\cos 3{,}5$.
Вариант 2. $\sin 1{,}5$, $\sin 2{,}5$, $\sin 3{,}5$, $\sin 4{,}5$.

■ Тригонометрические преобразования

6.58. **А** *Вариант 1.* 1) $\operatorname{tg}\alpha$; 2) $2\cos(\alpha-1)$; 3) 2.

Вариант 2. 1) $\sin 2\alpha$; 2) $-2\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{8}\right)$; 3) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}3\beta$.

Б 1) $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha$; 2) $-\sin 2\alpha\sin 4\beta$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$.

В 1) $-\sin 4\alpha$; 2) $\cos 4\alpha(40°+2\alpha)$; 3) $2\left|\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right|$.

■ Простейшие тригонометрические уравнения

6.60. **А** *Вариант 1.* 1) $-\frac{5\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$.

Вариант 2. 1) $\frac{4\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$; 3) $\frac{7\pi}{6}$.

Б 1) $\frac{25\pi}{8}$, $\frac{27\pi}{8}$; 2) $1+\frac{11\pi}{6}$; 3) $\frac{3}{2}+\frac{23\pi}{8}$.

В 1) $\frac{16\pi}{3}$; 2) $\sin(2-x)=\frac{1}{2}$, $x\in(-1;\ 4)$; $2-\frac{\pi}{6}$, $2-\frac{5\pi}{6}$; 3) $\frac{2}{3}+\frac{3\pi}{4}$.

6.61. **А** *Вариант 1.* 1) $\frac{\pi n}{3}$, $\pi n+\frac{\pi}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\sin x+\sin 3x=0$; $\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$;
3) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Вариант 2. 1) $\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 2) $\frac{2\pi n}{5}, \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}$; 3) $\pi n,\ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,$ $n \in \mathbf{Z}$.

Б 1) $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ \ \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$;

3) $\frac{4\pi}{21} + \frac{2\pi n}{7},\ \ -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}$.

В 1) $-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3},\ \ \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5},\ n \in \mathbf{Z}$; 2) $\pi n,\ \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$;

3) $-\frac{3\pi}{8} + \pi n,\ \ \frac{3\pi}{32} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbf{Z}$.

Тригонометрические уравнения

6.62. **А** *Вариант 1.* 1) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 2) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$;

3) $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n; \pi(2n+1)$.

Вариант 2. 1) $\pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n; \pi(2n+1),\ n \in \mathbf{Z}$;

2) $\pm\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 3) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Б 1) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 2)$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n; -\operatorname{arctg} 3 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$;

3) $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbf{Z}$.

В 1) $\pi(2n+1),\ n \in \mathbf{Z}$; 2) $-\operatorname{arctg}\frac{7}{3} + \pi n,\ \ \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$;

3) $2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Контрольные тесты с выбором ответа

Значения тригонометрических выражений

6.63. **А** а.

Б б.

В а.

Связь между значениями тригонометрических функций

6.64. **А** б.

Б г.

В в.

■ **Знаки тригонометрических функций**

6.65. **А** а.

Б а.

В а.

■ **Формулы приведения**

6.66. **А** г.

Б в.

В в.

■ **Преобразования тригонометрических выражений**

6.67. **А** в.

Б б.

В б.

■ **Двойной и половинный углы**

6.68. **А** б.

Б а.

В в.

■ **Формулы сложения**

6.69. **А** а.

Б в.

В б.

■ **Общее решение тригонометрического уравнения**

6.70. **А** в.

Б в.

В в.

■ **Решение тригонометрического уравнения в заданном промежутке**

6.71. **А** г.

Б а.

В б.

Глава 7

Тренажеры

■ **Общие свойства зависимостей и функций**

7.4. **В** 1) $2x^2 + 2y^2 + x - 2y - 7 = 0$; 2) $2x^2 + x - 2y - 7 = 0$;
4) $3x^2 + 3y^2 + x - 2y - 7 = 0$.

■ **Определение функции**

7.6. **А** 1) $f(1) = 1$; $f\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{4t}{t^2+4}$; 3) $f(-4) = 5$; $f(\sqrt{t}) = \sqrt{t+9}$;

5) $f(1) = \sqrt{2}$; $f\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t + \frac{1}{t}}$;

Б 2) $f(0{,}25) = \frac{11}{18}$; $f\left(\frac{t}{t+1}\right) = \frac{2t+3}{3t+5}$;

4) $f(1{,}5) = 7$; $f(\log_2 t) = t^2 - 1$.

В 2) $f(2{,}5) = \infty$; $f\left(\frac{t-3}{2t-5}\right) = \frac{12-5t}{19-8t}$;

5) $f(-1)$ не определено; $f(t - t^{-1}) = \sqrt{\frac{t^4 - t^2 + 1}{t^3 - t}}$.

7.7. **А** 1) $\mathbf{R}$; 2) $|x| \neq 2$; 3) $(-\infty; 2]$; 4) $[0; 2) \cup (2; +\infty)$; 5) $\mathbf{R}$.

Б 1) $(-\infty;-2) \cup (-2;1) \cup (1;+\infty)$; 4) $(-\infty;-1) \cup (-1;+\infty)$.

В 1) $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$;

2) $(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; +\infty)$; 3) $[0; 9) \cup (9; +\infty)$;

4) $\left(-\infty; -\sqrt[3]{3}\right) \cup \left(-\sqrt[3]{3}; \sqrt[3]{3}\right) \cup \left(\sqrt[3]{3}; +\infty\right)$; 5) $[0; +\infty)$.

7.8. **А** 1) б) $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$; в) $g(x) = \frac{1-x}{x^2-2x+2}$;

2) а) $g(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \geq 0, \\ x \text{ при } x < 0; \end{cases}$ б) $g(x) = \begin{cases} x+1 \text{ при } x \geq -1, \\ 0 \text{ при } x < -1; \end{cases}$

в) $g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-2}, \ x \in (-\infty; 1] \cup (2; +\infty), \\ 0, \ x \in (1; 2). \end{cases}$

Б 1) а) $g(x) = \frac{x^2+x}{2x^2+2x+1}$; в) $g(x) = \frac{x^3+x}{x^4+3x^2+1}$; 2) а) $g(x) = \sqrt{x}$;

б) $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x+1} \text{ при } x > -1, \\ 0 \text{ при } x < -1; \end{cases}$

в) $g(x)=\begin{cases}x^2+2x,\ x\in(-\infty;\ -2]\cup[0;+\infty),\\0,\ x\in(-2;0).\end{cases}$

В 1) а) $g(x)=\dfrac{x\sqrt{x}}{x^3+1}$; б) $g(x)=\dfrac{2^x}{2^{2x}+1}$;

в) $g(x)=\dfrac{x^3-3x^2+4x-2}{x^4-4x^3+9x^2-10x+5}$;

2) а) $g(x)=\begin{cases}x-\dfrac{1}{x},\ x\in[-1;0)\cup[1;+\infty),\\0,\ x\in(-\infty;-1)\cup(0;1);\end{cases}$

б) $g(x)=\begin{cases}x+1,\ x\in[-1;+\infty),\\0,\ x\in(-\infty;-1);\end{cases}$ в) $g(x)=\dfrac{1}{2}|x|$.

7.9. **А** 1) $h(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$, D: R; 2) $h(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$, D: $[1;+\infty)$;

3) $h(x)=\dfrac{1}{x}+2$, D: $[1;+\infty)\cup(-\infty;0)$; 4) $h(x)=-\sqrt{x}$, D: $x\ge 0$;

5) $h(x)=x^2+1$, D: $[0;+\infty)$.

Б 1) $h(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$, D: $x\ne 2$; 2) $h(x)=2-x^2$, D: $[0;2]$;

3) $h(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+4x}-\dfrac{1}{2}$, D: $[0;+\infty)$; 4) $y=-x-1$, D: $[0;+\infty)$;

5) $h(x)=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$, D: $[0;+\infty)$.

В 1) $h(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+8x+4}$, D: $\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$;

2) $h(x)=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{4x-3}$, $D:[1;+\infty)$; 3) не существует;

4) $h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x,\ x\in[0;+\infty),\\3x,\ x\in(-\infty;0);\end{cases}$ 5) не существует.

7.10. **А** 2), 3), 5), 6) четные; 1), 4), 8), 9) нечетные;
7), 10) общего вида.

Б 3), 4), 8), 10) четные; 5), 7) нечетные;
1), 2), 6), 9) общего вида.

В 3), 5) четные; 6) нечетная;
1), 2), 4), 7), 8), 9), 10) общего вида.

■ Линейные и дробно-линейные функции

7.17. **Б** 3) $\dfrac{2}{3},-4$; 4) $[-8;2]$; 5) $\dfrac{4}{3},-4$.

В 1) $a=3$, нет решения; $a\neq 3, x=\dfrac{9}{a-3}$; 2) $9a$;

4) $a<1 \Rightarrow x\geq \dfrac{1}{1-a}; a>1 \Rightarrow x\leq \dfrac{1}{1-a}; a=1\Rightarrow \varnothing$;

5) $a\geq -1 \Rightarrow x\in[2-a;4+a]; a<-1\Rightarrow\varnothing$.

■ Квадратичные функции

7.20. **А** 2) $\dfrac{-3\pm\sqrt{3}}{6}$; 3) $\varnothing$; 4) $\varnothing$; 5) $\pm1, \pm\sqrt{2}$; 6) $-2, 1$; 7) $-2, 3$; 8) $-1, 2$.

Б 1) ±8; 2) -2; 3) $\pm\sqrt{15}$; 4) $3, -2, \dfrac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{73}\right)$; 5) $-\dfrac{1}{2}, -4$; 6) $-5, 2$;

7) $\dfrac{-3\pm\sqrt{73}}{2}$; 8) $0, -3, \dfrac{-3\pm\sqrt{73}}{2}$.

В 1) $\dfrac{3}{2}, -2$; 2) $a\leq1\Rightarrow x=-1\pm\sqrt{1-a}$; $\;a>1\Rightarrow\varnothing$;

3) $|a|\geq2\Rightarrow x=-a\pm\sqrt{a^2-4}$; $|a|<2\Rightarrow\varnothing$;

4) $a\in(-\infty;0)\cup\left(0;\dfrac{1}{3}\right)\Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-3a}}{a}$, $a=0\Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$, $a>\dfrac{1}{3}\Rightarrow\varnothing$;

5) $1, -2\pm\sqrt{3}$; 6) $-5, -3$; 7) $-\dfrac{3}{2}, 0, 1$; 8) $\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}, \pm\dfrac{3}{\sqrt{11}}$.

7.21. **А** 2) $(-\infty;-4]\cup[-1;+\infty)$; 5) $\left[-\sqrt{5};0\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$; 6) $(-2;0)\cup(1;3)$;

7) $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Б 3) $\mathbf{R}$; 5) $(-\infty;-1]$; 6) $\left[-3;-\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)\cup\left(\sqrt{\dfrac{5}{2}};3\right]$; 7) $(-\infty;0)\cup(1;6)$.

В 1) $a\leq1\Rightarrow x\in\left[-1-\sqrt{1-a};-1+\sqrt{1-a}\right]$, $\;a>1\Rightarrow\varnothing$;

2) $a>0\Rightarrow|x|\leq\dfrac{1}{a}$, $\;a<0\Rightarrow|x|\geq-\dfrac{1}{a}$;

3) $a\leq1\Rightarrow x\in(-\infty;a]\cup[1;+\infty)$, $a>1\Rightarrow x\in(-\infty;1]\cup[a;+\infty)$;

4) $a>0\Rightarrow x\in(a;2a)$, $a<0\Rightarrow x\in(2a;a)$, $a=0\Rightarrow\varnothing$;

5) $\left(-\infty;-\sqrt{3+\sqrt{5}}\right]\cup\left[-\sqrt{3-\sqrt{5}};\sqrt{3-\sqrt{5}}\right]\cup\left[\sqrt{3+\sqrt{5}};+\infty\right)$;

6) $(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(3;+\infty)$;

7) $\left[-2-\sqrt{3};-2\right)\cup\left[-\dfrac{1+\sqrt{7}}{3};-1\right)\cup\left[-2+\sqrt{3};0\right)\cup\left[\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3};1\right)$.

■ Степенные, показательные и логарифмические функции

7.23. **А** 2) $x\leq1{,}5$; 3) $x>0$; 4) $x>1$; 5) $x\geq3$; 6) $x\neq2$; 7) $x>-1$;

8) $|x|<2$; 9) $-3<x<2$; 10) $x>2$.

Б 1) $\mathbf{R}$; 2) $x>3$; 3) $[0;81)\cup(81;+\infty)$; 4) $(-\infty;2)$; 5) $[0;4]$; 6) $x\neq0{,}5$;

7) $x<1$; 8) $(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$; 9) $(-\infty;0)\cup(2;3)$; 10) $x<2$.

В 1) $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$; 2) $x \le 2$; 3) $x \le -4$; 4) $[1; 5]$; 5) $x \ge 1$; 6) $x \le -1$; 7) $|x| < 3$; 8) $(0, 5; 1)$; 9) $x < 8$; 10) $x < 1$.

7.24. **А** Возрастают 1), 4); убывают 2), 3), 5).

Б Убывают 1), 4); возрастают 2), 3), 5).

В 1) немонотонная; возрастают 3), 4), 5); убывает 2).

7.25. **А** 2) при $x = 0$ — max, $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ — min;

7) при $x = \dfrac{3-\sqrt{19}}{2}$ — max, $x = \dfrac{3+\sqrt{19}}{2}$ — min.

Б 2) при $x = -4$ — max, $x = 2$ — min;

3) при $x = \dfrac{1}{2}$ — min, $x = -\dfrac{1}{2}$ — max; 4) экстремума нет;

5) $x = \dfrac{8}{27}$ — min, $x = 0$ — max; 6) $x = \dfrac{1}{3}$ — min.

В 1) при $x = e^{-2}$ — max, $x = 1$ — min; 2) при $x = \pm 1$ — max, $x = 0$ — min; 3) $x = -\dfrac{1}{2}$ — max; 4) $x = -\dfrac{2}{5}$ — max.

7.26. **В** 1) 10, 30; 3) –0,5, 3.

7.27. **А** 1) $[0; +\infty)$; 2) $(0; +\infty)$; 3) $(-\infty; 0)$; 4) $\mathbf{R}$; 5) $[1; +\infty)$.

Б 1) $[-1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 1)$; 3) $(0; +\infty)$; 4) $(0; +\infty)$; 5) $[2; +\infty)$.

В 3) $[-0{,}5; +\infty)$; 4) $\mathbf{R}$; 5) $\left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right]$.

■ Тригонометрические функции

7.29. 3) $\mathbf{R}$, 2π, $y_{\min} = -1$, $y_{\max} = -\dfrac{1}{3}$; 4) $x \ne \dfrac{\pi}{2}n$, π, нет наибольшего и наименьшего значений; 5) $x \ge 0$, непериодическая, $y_{\min} = -1$, $y_{\max} = 1$; 8) $x \ne \pi(2n+1)$, 2π, нет наибольшего и наименьшего значений; 9) $x \ne \dfrac{\pi}{2}(2n+1)$, π, $y_{\min} = 3$, нет наибольшего значения; 10) $\mathbf{R}$, 2π, $y_{\min} = \dfrac{2}{5}$, $y_{\min} = 2$, $x \ne \dfrac{\pi}{4}(4n+1)$, 2π, нет наибольшего и наименьшего значений.

Б 1) $x \ne \dfrac{\pi}{2}n$, π, нет наименьшего и наибольшего значений; 2) $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$, 2π, $y_{\min} = 0$, $y_{\max} = \sqrt{3}$; 3) $x \ne \dfrac{\pi n}{2} + \dfrac{5\pi}{12}$, $\dfrac{\pi}{2}$, нет наибольшего и наименьшего значений; 4) $x \ne \dfrac{\pi n}{2}$; π, нет наибольшего и наименьшего значений; 5) $x \ne -\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, 2π, нет наибольшего и наименьшего значений; 6) $y = \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$; $x \ne \dfrac{\pi n}{2}$, 2π, нет наибольшего и наименьшего значений; 7) $x \ne \pi n, x \ne \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, 2π, нет наибольшего и наименьшего значений; 8) $x \neq \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, 2π, нет наибольшего и наименьшего значений; 9) $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, 2π, $y_{\min} = 0$, $y_{\max} = 1$;

10) $x \neq \pi n$, π, $y_{\min} = -\frac{1}{6}$, нет наибольшего значения.

В 1) $\left[\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$, π, $y_{\min} = 0$, $y_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; 2) $\left[\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$, π, нет наибольшего и наименьшего значений;

3) $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right]$, 2π, $y_{\min} = 0$, $y_{\max} = 1$;

4) $\left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right]$, 2π, $y_{\min} = 0$, $y_{\max} = \sqrt[4]{2}$;

5) $2\pi n$, 2π, $y_{\min} = y_{\max} = 0$; 6) $x \neq \frac{\pi}{4}(2n+1)$, $x \neq \frac{\pi}{8}(4n \pm 1)$, $\frac{\pi}{2}$, нет наибольшего и наименьшего значений;

7) $x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $y \equiv 1$; 8) $y_{\min} = -\frac{\pi}{2}$, $y_{\max} = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$, π;

9) $[-1; 0]$, $y_{\min} = 0$, $y_{\max} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, непериодическая;

10) $(0; 1]$, $y_{\max} = \ln\frac{\pi}{2}$, $y_{\min}$ нет, непериодическая.

7.30. **А** 2), 6) убывают, 8) возрастает.

7.31. **Б** 1) $\frac{5\pi}{6}$; 3) $-\frac{\pi}{6}$; 4) $\frac{\pi}{2}$; 6) $\frac{7\pi}{6}$; 8) $\frac{3}{5}$; 10) $-\frac{4}{3}$; 11) $\pi - 3$; 12) $5 - 2\pi$;

13) $4 - \frac{3}{2}\pi$; 14) $8 - \frac{5}{2}\pi$; 15) $5\pi - 15$.

7.32. **В** 1) $y = \arcsin x + 2\pi$; 2) $y = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin x$; 3) $y = \arcsin x + \frac{7\pi}{3}$;

4) $y = 2\pi - \arccos x$; 5) $y = \arccos x - 4\pi$; 6) $y = 10\pi - \arccos\frac{x}{2}$.

Матричные тесты

■ Чтение графиков

7.33. **А**

Свойство функции	Промежуток				
	$[-3; -2]$	$[-1; 1]$	$(0; 1]$	$[-0,1; 3]$	$[2,5; 3]$
Положительная и возрастает					+
Отрицательная и убывает			+		

Окончание таблицы

Свойство функции	Промежуток				
	$[-3; -2]$	$[-1; 1]$	$(0; 1]$	$[-0{,}1; 3]$	$[2{,}5; 3]$
Выполняется неравенство $f(x) \le 1$	+		+	+	+
Принимает наибольшее значение на конце промежутка	+	+	+	+	+
Уравнение $\lvert f(x)\rvert = 1$ имеет хотя бы один корень	+	+	+	+	

Б

Свойство функции	Промежуток				
	$[-2; -1]$	$[-2; 0]$	$[0; 1]$	$[1; 2]$	$[2; 3]$
Отрицательная или убывает			+	+	+
Отрицательная и убывает				+	
Выполняется неравенство $\lvert f(x)\rvert < 1{,}5$					
Принимает наименьшее значение на конце промежутка	+	+	+	+	+
Уравнение $f^2(x) = 1$ имеет ровно один корень	+			+	

В

7.34.

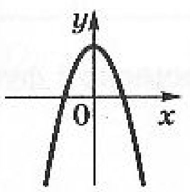
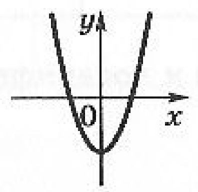
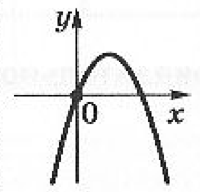
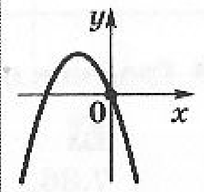
Интервал	Свойство функции				
	g не определена	$g > 0$, $g \downarrow$	$g > 0$, $g \uparrow$	$g < 0$, $g \uparrow$	$g < 0$, $g \downarrow$
$(-3; -1)$	+				
$(-1; 0)$		+			
$(0; 1)$					+
$(1; 3)$			+		

Интервал	Свойство функции				
	g не определена	$g > 0$, $g \downarrow$	$g > 0$, $g \uparrow$	$g < 0$, $g \uparrow$	$g < 0$, $g \downarrow$
(3; 5)				+	

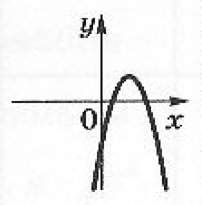
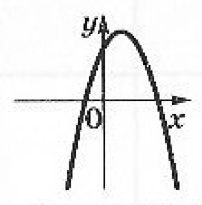
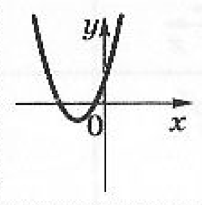
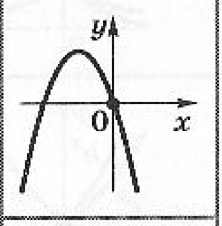
■ График квадратичной функции

7.35.

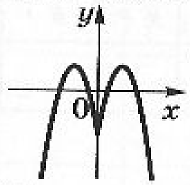
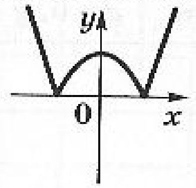
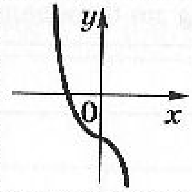
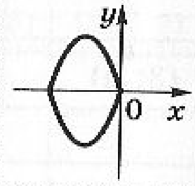
А

Функция	График функции			
				
$y = x\,(3 - x)$			+	
$y = -x\,(1 + x)$				+
$y = 3 - 0{,}5x^2$	+			
$y = x^2 - 2$		+		

Б

Функция	График функции			
				
$y = (5 - x)(x + 2)$		+		
$y = 1 - (2x - 3)^2$	+			
$y = (2 + x)(x + 1)$			+	
$y = 9 - (x + 3)^2$				+

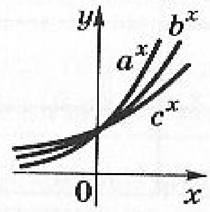
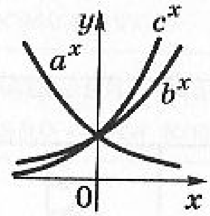
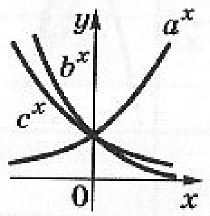
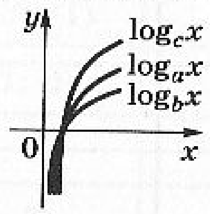
В

Функция	График функции			
				
$y = \|(5 - x)(x + 2)\|$		+		
$y = 1 - (2\|x\| - 3)^2$	+			
$y = -2 - x\|x\|$			+	
$\|y\| = 9 - (x + 3)^2$				+

■ Графики показательной и логарифмической функций

А

7.36.

График функции	Неравенство				
	$b < a < c$	$c < a < b$	$b < c < a$	$c < b < a$	$a < b < c$
				+	
					+
			+		
		+			

■ Преобразование графиков

Б

7.37.

Преобразование графика $y = \ln x$	$y = \ln\frac{1}{x}$	$y = \ln(-x)$	$y = \ln(x - 3)$	$y = \log_2 x$
Сдвиг по оси Ox			+	
Сдвиг по оси Oy				
Симметрия относительно оси Ox	+			
Симметрия относительно оси Oy		+		
Растяжение по оси Oy				+

В

7.38.

Ось (центр) симметрии	$y = e^x$	$y = -\ln x$	$y = \ln\frac{e^2}{x}$	$y = \ln\left(-\frac{1}{x}\right)$	$y = \ln(-x - 2)$
Ось Ox		+			
Прямая $y = x$	+				
Начало координат				+	
Прямая $x = 1$					+
Прямая $y = 1$			+		

Самостоятельные работы

■ Простейшие зависимости

7.40. **А** *Вариант 1*. $y = 2x^2$.

Вариант 2. $y = y = \dfrac{2}{3x}$.

7.41. **А** *Вариант 1*. $y = 4x$;

Вариант 2. $y = -2x$.

7.42. **А** *Вариант 1*. $x(t) = \dfrac{kt^2}{v}$.

Вариант 2. $m(v) = \dfrac{2E}{v^2 + 2gh}$.

Понятие функции

А **7.43.** 1) $y(2)=\frac{2}{3}$, $y(2t)=\frac{2t}{4t^2-1}$.

7.44. $y_1=\frac{3}{2}$, $x_1=\frac{9}{4}$.

7.45. $[0;1)\cup(1;+\infty)$.

Б **7.47.** 1) $a=b=3$. **7.48.** $[9;+\infty)$.

Чтение графика

7.50. **А** *Вариант 1.* 1) $[-4; 5]$; 2) $[-2; 4]$; 3) $[-4; -2]$, $[-2; 3]$, $[3; 5]$; 4) -2; 3; 5) -2, $(1; 2)$, 4; 6) -4, 2; 7) $[-4; 2,5]\cup[4,5; 5]$.
Вариант 2. 1) $[-4; 5]$; 2) $[-1; 3)\cup 4$; 3) $[-4; -2]$, $[-2; 2)$, $(2; 4)$, $(4; 5]$; 4) -2, 2, 4; 5) -1, 4; 6) нет решений; 7) $[-2,8; 1]\cup 4\cup 5$.

Б **7.51.** $[-4; 6]$; 2) $[-2; 2)\cup(2; 6]\cup -4$; 3) $[-4; -3]$, $[-3; -2]$, $(-2; 2)$, $(2; 4)$, $(4; 6)$; 4) $[4; 6)$, -2, -1; 5) $t>1$; 6) неверно.

Линейная функция

7.52. **А** *Вариант 1.* 1) $(-\infty; -3]$; 3) $y=-2x$; 4) $[-7; 11]$.
Вариант 2. 1) $[2; +\infty)$; 3) $y=4x$; 4) $[-7; 20]$.

Б *Вариант 1.* 1) $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{3}\right]$; 2) $y=-2x+5$.

Вариант 2. 1) $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$; 2) $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$.

Квадратичная функция

А **7.58.** *Вариант 1.* $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$.

Вариант 2. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right]\cup[1; +\infty)$.

7.59. *Вариант 1.* $\frac{2}{3}$, 9.

Вариант 2. $\frac{3}{4}$, 3.

Б **7.60.** $(-\infty; -1]\cup(2; 4)\cup[5; +\infty)$. **7.61.** -6, -2. **7.62.** $\left(\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}-\frac{b}{c}$.

В **7.64.** $\begin{cases} b>0, \\ b^2-4c>0. \end{cases}$ **7.65.** $c\in(0; 1]$.

График показательной функции

7.67. **А** *Вариант 1.* 1) $\left[\frac{1}{4}; 8\right]$; 2) $\left[\frac{1}{8}; 4\right]$; 3) $\left[\frac{1}{64}; 512\right]$.

Вариант 2. 1) $\left[\frac{4}{9}; \frac{3}{2}\right]$; 2) $\left[\frac{1}{36}; 6\right]$; 3) $\left[\frac{9}{64}; \frac{8}{3}\right]$.

Б *Вариант 1.* 1) $\left[\frac{81}{256}; \frac{64}{27}\right]$; 2) $\left[\frac{81}{6144}; \frac{4096}{27}\right]$; 3) $\left[\frac{1}{27}; 81\right]$.

Вариант 2. 1) $\left[\frac{4}{9}; \frac{2}{3}\right]$; 2) $\left[\frac{1}{36}; \frac{1}{6}\right]$; 3) $\left[\frac{8}{3}; \frac{64}{9}\right]$.

7.68. **Б** *Вариант 1.* [2; 3]; 2) [0; 2]; 3) [–3; 4].
Вариант 2. [0; 2]; 2) [0; 2]; 3) [1; 2].

■ График логарифмической функции

7.70. **А** *Вариант 1.* 1) [1; 3]; 2) $\left[\frac{1}{1+\log_3 4}; \frac{3}{1+\log_3 4}\right]$;
3) $\left[\frac{3}{1-\log_3 4}; \frac{1}{1-\log_3 4}\right]$.

Вариант 2. 1) [1; 4]; 2) $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$; 3) [–4; –1].

Б *Вариант 1.* 1) [–5; –1]; 2) [1; 5]; 3) $\left[-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right]$;

Вариант 2. 1) [–4; –1]; 2) $\left[\frac{3}{1-\log_3 4}; -\frac{1}{1-\log_3 4}\right]$;

3) $\left[-\frac{3}{1+\log_3 4}; -\frac{1}{1+\log_3 4}\right]$.

7.71. **Б** *Вариант 1.* 1) [1; 2]; 2) $\left[\frac{1}{4}; 4\right]$; 3) $\left[\frac{1}{8}; 1\right]$.

Вариант 2. 1) $\left[\frac{1}{9}; 1\right]$; 2) $\left[\frac{3}{4}; \frac{4}{3}\right]$; 3) $\left[\frac{1}{12}; 1\right]$.

■ Монотонность показательной и логарифмической функций

7.72. **А** *Вариант 1.* 1) $3^{400} > 4^{300}$; 2) $\sqrt[6]{24} < \sqrt[3]{5}$; 3) $\lg 2\sqrt{5} < \lg 4{,}5$.
Вариант 2. 1) $4^{500} > 5^{400}$; 2) $\sqrt[8]{10} > \sqrt[4]{3}$; 3) $\log_4 5 > \log_6 5$.

Б *Вариант 1.* 1) $3^{34} > 2^{51}$; 2) $26^{21} < 82^{16}$; 3) $2 - 2\lg 2 + \lg 3 < 2\lg 11$.

Вариант 2. 1) $6^{26} > 3^{39}$; 2) $24^{13} < 126^{9}$; 3) $\frac{1}{2} + \lg 3 < \lg 19 - \lg 2$.

7.73. **А** *Вариант 1.* < 0. *Вариант 2.* > 0.
Б *Вариант 1.* Нет. *Вариант 2.* < 0.

Контрольные тесты с выбором ответа

■ Чтение графика

А **7.75.** в.

Б 7.76. в.

В 7.77. в.

■ **Симметрия графика**

А 7.78. в.

Б 7.79. г.

В 7.80. б.

■ **Обратная функция**

А 7.81. г.

Б 7.82. б.

В 7.83. г.

■ **Линейная система**

7.84. А б.

Б г.

В б.

■ **Квадратичная функция**

А 7.85. г.

Б 7.86. в.

В 7.87. б.

■ **Рациональные неравенства**

А 7.88. б.

Б 7.89. в.

В 7.90. в.

■ **Графики степенных функций**

7.91. А а.

Б г.

В а.

■ **Множество значений показательной функции**

А 7.92. г.

Б 7.93. а.

В 7.94. б.

■ **Область определения логарифмической функции**

А 7.95. б.

Б 7.96. а.

В 7.97. б.

Глава 8

Тренажеры

■ Общие свойства многогранников

В **8.2.** Увеличились: B — на $(n - 1)$, P — на n, $Г$ — на 1. **8.5.** $(3 \cdot 2^{n+1} + 8)$. **8.6.** Не может.

■ Развертки и разрезания

А **8.10.** 1, 2, 4, 5. **8.11.** 1, 3.

Б **8.16.** Кратчайший путь — ломаная $AMCNA$, где M и N — основания перпендикуляров, опущенных из A и C на PB и PD.

В **8.19.** 4.

■ Многогранники

Б **8.23.** 1. **8.24.** 45°. **8.25.** $\sqrt{10}$.

В **8.26.** $\dfrac{a\sqrt{2l^2 - a^2}}{\sqrt{2l^2 - a^2} + a\sqrt{2}}$. **8.27.** $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$; **8.28.** 2.

А **8.30.** 4. **8.31.** $2\sqrt{3}$. **8.32.** $\dfrac{l\sqrt{3}}{2}$. **8.33.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{4l^2 - a^2 - b^2}$. **8.34.** а) 97 дм; б) 6,5 дм.

Б **8.35.** 13 см. **8.36.** $4\sqrt{15 - 7\sqrt{3}}$ дм. **8.37.** $\dfrac{25}{4}$. **8.38.** а) 25 см; б) 17 см; в) 41 см. **8.39.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

В **8.40.** $\sqrt{2}$. **8.41.** 3 дм. **8.42.** $\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$. **8.43.** 7 и 5 дм. **8.44.** $\dfrac{11}{18}, \dfrac{43}{18}$.

А **8.45.** а) 8; б) $\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$; в) $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$ кв. ед.; г) $\arccos 0{,}46$; д) $\operatorname{arctg}\dfrac{8}{3\sqrt{3}}$. **8.46.** $\dfrac{3}{2}a$.

Б **8.47.** 1) $\sqrt{65}$; 2) 9; 3) $\operatorname{arctg}\dfrac{7}{4\sqrt{2}}$; 4) 36 кв. ед.

В **8.48.** $n = 3, 4, 5$.

А **8.49.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **8.50.** 11 см. **8.51.** $\arccos\left(\sqrt{5} - 2\right)$. **8.52.** 45°. **8.53.** $\operatorname{arctg}\dfrac{2h}{a - b}$.

Б **8.54.** $\arccos\dfrac{1}{7}$. **8.55.** 32 см. **8.56.** $2\sqrt{2}$. **8.57.** $4 + 6\sqrt{3}$.

В **8.58.** 10, 17 см. **8.59.** $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. **8.60.** а) $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{6}$; б) $a\sqrt{\frac{2}{3}}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\arccos\left(\pm\frac{1}{3}\right)$. **8.61.** $2\,\mathrm{arctg}\cos\alpha$; $\frac{7b^2}{8\cos\alpha}$.

Круглые тела

А **8.63.** 3. **8.64.** 5 и 8. **8.65.** а) $\sqrt{8}$; б) $\frac{4}{3}$. **8.66.** 5; 2,4. **8.69.** 3. **8.70.** а) 4; б) $\frac{3}{5}$. **8.71.** 8; окружность. **8.72.** $\frac{9}{5}$; 3. **8.73.** 10. **8.74.** 10.

Б **8.77.** $\frac{l\sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{2}+\mathrm{tg}\,\alpha}$.

В **8.78.** $S_{\text{сеч}}=\sqrt{(9+x^2)(25-x^2)}$. **8.79.** $\arccos\frac{1}{9}$.

8.80. $\arcsin 0{,}8$. **8.81.** $\frac{a^3\pi(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha-1)^2}{72\mathrm{tg}^2\alpha}$; $\frac{a^3\sqrt{3}(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha-1)^2}{72\mathrm{tg}^2\alpha}$, $\alpha>30°$. **8.82.** Не будет.

Матричные тесты

Свойства призмы

А

8.83.

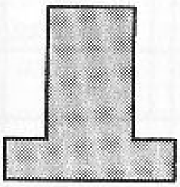
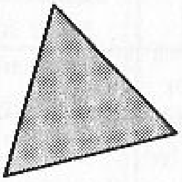
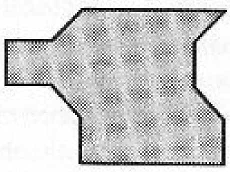
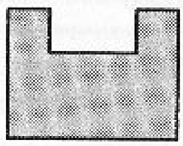
Призма	Свойства				
	Все диагонали призмы равны между собой	Высота призмы равна боковому ребру	Все грани призмы — прямоугольники	Основание призмы — квадрат, а боковые грани, равные между собой, — ромбы	Основание призмы — квадрат, а боковые грани — прямоугольники
Прямой параллелепипед		+			+
Прямоугольный параллелепипед	+	+	+		+
Прямая призма		+			+

Окончание таблицы

Призма	Свойства				
	Все диагонали призмы равны между собой	Высота призмы равна боковому ребру	Все грани призмы — прямоугольники	Основание призмы — квадрат, а боковые грани, равные между собой, — ромбы	Основание призмы — квадрат, а боковые грани — прямоугольники
Правильная призма		+			+
Наклонная призма				+	
Наклонный параллелепипед				+	

Б

8.84.

Многогранник	Многоугольник			
				
Пирамида		+		
Прямая призма	+			
Параллелепипед	+			
Наклонная призма				
Такого многогранника не существует			+	+

В

8.85.

Свойство симметрии	Многогранник				
	Куб	Правильный тетраэдр	Правильная четырехугольная пирамида	Наклонный параллелепипед	Треугольная призма
Центр симметрии	+				
Ось симметрии	+		+		
Плоскость симметрии	+	+	+		
Поворот вокруг оси	+	+	+		

■ Сечения

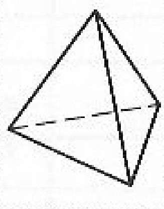
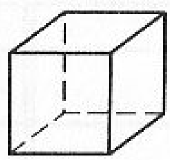
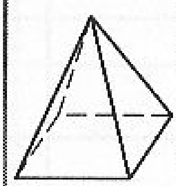
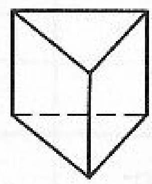
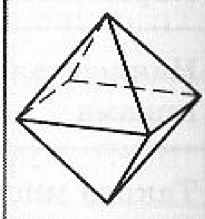
А

8.86.

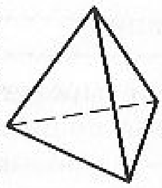
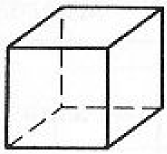
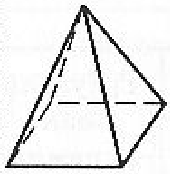
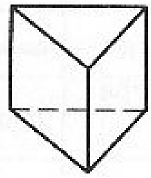
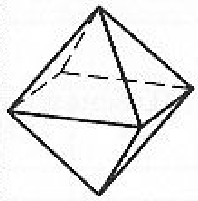
Поверхность	Плоскость				
	Окружность	Гипербола	Отрезки прямых	Эллипс	Многоугольник
Сфера	+				
Круговой цилиндр	+		+	+	+
Куб					+
Тетраэдр			+		+
Конус	+	+	+	+	+

Б

8.87.

Плоскость	Многогранник				
					
Треугольник	+	+	+	+	+

Окончание таблицы

Плоскость	Многогранник				
					
Квадрат	+	+	+	+	+
Параллелограмм с острым углом		+			
Пятиугольник		+	+		
Шестиугольник		+			+

В

8.88.

Плоская фигура	Плоскость сечения проходит через			
	две диагонали куба	три точки, лежащие на трех смежных ребрах куба	три точки, лежащие на трех боковых ребрах куба на разном расстоянии от основания	две точки, лежащие на смежных сторонах нижнего основания, и точку, лежащую на стороне верхнего основания
Параллелограмм	+			+
Прямоугольник	+			+
Треугольник		+		
Трапеция				+
Пятиугольник			+	
Шестиугольник				+
Сечение провести невозможно				

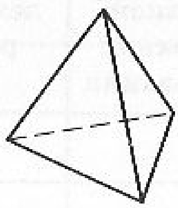
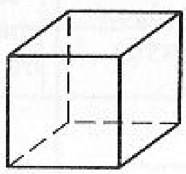
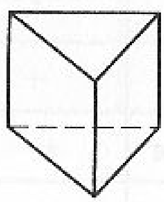
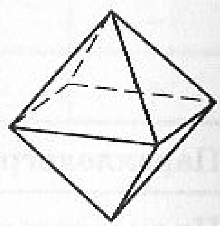
Б

8.89.

Плоская фигура	Многогранник				
	Куб	Треугольная пирамида	Октаэдр	Четырехугольная правильная призма	Треугольная призма
Треугольник		+			+
Четырехугольник	+	+	+	+	+
Пятиугольник					+
Шестиугольник	+		+	+	
Невыпуклая фигура					
Многоугольник с числом сторон, большим четырех	+		+	+	+

В

8.90.

Количество части	Многогранник			
				
14				
15				
19	+			
21			+	
27		+		+

■ Сечения шара плоскостью

А

8.91.

Радиус шара R	Радиус сечения r				
	8	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{7}$	24	$4\sqrt{6}$
26					
$6\sqrt{3}$				+	
$2\sqrt{41}$		+			
14	+				
$8\sqrt{2}$			+		+

Б

8.92.

Многоугольник	Радиус сферы R				
	10	5	12	4	8
Прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8	+	+	+		+
Равносторонний треугольник со стороной 6	+	+	+		+
Прямоугольник со сторонами 4 и 7	+	+	+	+	+
Квадрат со стороной 8	+		+		+
Правильный шестиугольник со стороной 5	+	+	+		+

Самостоятельные работы

■ Призмы

А **8.93.** 5; 12; 13.

Б **8.94.** $8\sqrt{3}$.

В **8.95.** $\frac{1}{2}l^3\cos^2\alpha\sin\alpha$.

■ **Пирамиды**

А **8.96.** $H = 1{,}5a$.

Б **8.97.** $120°$.

■ **Круглые тела**

А **8.99.** $2\pi R^2 \sin 2\varphi \sin \varphi$.

Б **8.100.** $\frac{\pi p^3}{32}$.

В **8.101.** $\alpha = \arcsin 0{,}25$.

Контрольные тесты с выбором ответа

А **8.102.** б. **8.103.** а. **8.104.** г. **8.105.** б.

Б **8.106.** г. **8.107.** в. **8.108.** а.

В **8.109.** г.

Глава 9

Тренажеры

■ **Последовательность**

9.1. **А** 1) 6, 12, 18, 24, 30, 36; 2) 1, 2, 3, 5, 7, 11; 3) 1, 4, 9, 16, 25, 36; 4) 0, 0, 2, 0, 2, 4; 5) 3, 4, 2, 1, 3, 4; 6) 3, 5, 9, 17, 33, 65; 7) 0, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{17}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{5}{37}$; 8) 2, 5, 13, 36, 104, 317; 9) 2, 2, 6, –2, 2, 2; 10) 1024, 32, $4\sqrt{2}$, $2\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[8]{4}$.

Б 1) 12, 19, 26, 33, 40, 47; 2) 4, 6, 8, 9, 10,12; 3) 1, 2, 3, 5, 6, 7; 4) 1, 4, 6, 2, 6, 4; 5) 4, 1, 4, 2, 1, 3; 6) 7, 9, 3, 1, 7, 9; 7) 2, 6, 12, 20, 30, 42; 8) 2, 3, 7, 13, 27, 53; 9) 1, 3, 6, 10, 15, 21; 10) 1, 2, 3, 2, 1, 1.

В 1) 6, 10,14, 30, 42, 105; 2) 5, 10, 13, 26, 29, 40; 3) 2, 2, 2, 4, 6, 10; 4) 1, 2, 3, 4, 6, 8; 5) 1, 5, 6, 11, 20, 22; 6) –1, –1, –1, 1, –1, 1; 7) 0, 1, 2, 3, 4, 5; 8) 1, 2, 8, 64, 1024, 32768; 9) 1000, 5, 2, 1, 1, 1; 10) 1, –2, 4, –8, 16, –32.

9.2. **А** 1) не монотонна, ограничена, 0; 2) возрастает, ограничена, 1; 3) не монотонна, ограничена, 0; 4) не монотонна, ограничена, 0; 5) не монотонна, ограничена, 0.

Б 1) $\frac{2^n + 3^n}{2^{n-1} + 3^{n-1}}$, возрастает, ограничена, 3; 2) $\frac{n^2+1}{2n^2}$, убывает, ограничена, 0,5; 3) $\operatorname{tg} n$, не монотонна, не ограничена;

4) $\dfrac{n}{\sin n}$, не монотонна, не ограничена; 5) $\dfrac{(-1)^{n-1}2^n}{n!}$, не монотонна, ограничена, 0; 6) $\dfrac{n+1}{2n}$, убывает, ограничена, 0,5.

В 1) $\sqrt[n]{n}$, убывающая при $n > 1$, ограничена, 1; 2) $\left(\dfrac{2^n}{n+1}\right)^{(-1)^{n-1}}$, не монотонна, не ограничена; 3) $(-1)^{n-1}\dfrac{\cos n}{n}$, не монотонна, ограничена, 0; 4) $n\sin\dfrac{n\pi}{7}$, не монотонна, не ограничена; 5) $\left(\dfrac{n}{2n-1}\right)^n$, убывает, ограничена, 0; 6) $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$, убывает, ограничена, $\dfrac{1}{3}$; 7) $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$, убывает, ограничена, 0; 8) $\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$, убывает, ограничена, 1.

Суммирование последовательностей

9.3. **А** 1) 4; 2) $\dfrac{5}{7}$; 3) 6; 4) $-\dfrac{3}{4}$;

Б 1) $\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$; 2) $\dfrac{14}{3}$; 3) $\dfrac{1}{1-\sin 1}$; 4) 1; 5) 1.

В 1) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$; 2) 4; 3) $\dfrac{1}{2}$;4) 6.

9.4. **А** 1) $\dfrac{2}{9}$; 2) $\dfrac{2}{45}$; 3) $\dfrac{7}{30}$; 4) $\dfrac{13}{111}$; 5) $\dfrac{52}{99}$.

Б 1) $\dfrac{97}{300}$; 2) $\dfrac{51}{220}$; 3) $\dfrac{413}{1650}$; 4) $\dfrac{5}{7}$; 5) $\dfrac{13}{24}$.

Арифметическая прогрессия

А **9.5.** 1) да; 2) $d = 2$, $a_4 = 13$, $a_7 = 19$, $S_6 = 72$; 3) $d = -3$, $a_4 = 12$, $a_7 = 3$, $S_6 = 81$; 4) $d = 5$; 5) $a_5 = 20$.

Б **9.6.** 1) нет; 2) $d = 4$, $a_7 = 21$, $a_{11} = 37$, $S_{25} = 1\,125$; 3) $d = \dfrac{8}{3}$, $a_7 = \dfrac{25}{3}$, $a_4 = \dfrac{1}{3}$, $S_6 = 6$; 4) $d = -0{,}012$; 5) $d = -14{,}72$.

В **9.7.** 1) да; 2) $d = 4-\sqrt{2}$, $a_7 = 16-\sqrt{2}$, $a_{13} = 40-7\sqrt{2}$, $S_{12} = 168-6\sqrt{2}$; 3) $d = -0{,}0124$, $a_4 = 0{,}0576$, $a_7 = 0{,}0204$, $S_{128} = -122{,}7776$; 4) $S_6 = 0{,}0045$; 5) не существует.

Геометрическая прогрессия

А **9.8.** 1) да; 2) $q = -3$, $b_4 = 3^4$, $b_7 = -3^7$, $S_6 = 546$; 3) $q = 0{,}1$, $b_4 = 0{,}0001$, $b_7 = 0{,}0000001$, $S = \dfrac{1}{9}$; 4) $q = 0{,}1$; 5) $b_5 = 128$.

Б **9.9.** 1) да; 2) $q = -0{,}5$, $b_7 = 0{,}03125$, $b_{11} = 0{,}001953125$, $S = \dfrac{4}{3}$; 3) $q = \sqrt[5]{3}$, $b_4 = 3^{\frac{4}{5}}$, $b_7 = 3^{\frac{7}{5}}$, $S_6 = \sqrt[5]{3}\,\dfrac{3\sqrt[5]{3}-1}{\sqrt[5]{3}-1}$; 4) $q = 0{,}09$; 5) $q = \dfrac{1}{3}$.

В **9.10.** 1) нет; 2) $q=\sqrt{2}$, $b_7=24\sqrt{2}$, $b_{13}=192\sqrt{2}$, $S_{12}=189(2+\sqrt{2})$; 3) $q=0,1$, $b_4=0,0007$, $b_7=0,0000007$, $S=\frac{7}{9}$; 4) $S_6=-0,1222221$; 5) $q=2$, $b_1=1$ или $q=\frac{1}{2}$, $b_1=4$.

■ Предел функции

9.11. **А** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{4}{3}$; 4) 0; 5) $\frac{1}{2}$ при $x\to+\infty$, $-\frac{1}{2}$ при $x\to-\infty$; 6) 2.

Б 1) 2; 2) –5; 3) –1; 4) 0 при $x\to+\infty$, $+\infty$ при $x\to-\infty$; 5) 0 при $x\to+\infty$, –2 при $x\to-\infty$; 6) –1.

В 1) 0; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $-\frac{5}{3}$; 4) 1; 5) 4; 6) $\frac{1}{2}$.

■ Производная функции

9.12. **А** 4) $\frac{4}{3}x-2$; 6) $5x^{-3}$; 7) $-x^{-3}$; 9) $4x^{\frac{1}{3}}$; 11) $-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}+1$; 13) $-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$;

15) $-\frac{5}{24}x^{-\frac{11}{6}}$; 18) $2e^{2x}+2$; 19) $\frac{1}{x-1}$; 20) $3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$;

22) $e^{-x}(1-x)$; 24) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$; 27) $-8(3-2x)^3$; 29) $\frac{4}{3}(2x-1)^{\frac{1}{3}}$;

31) $-\frac{2x\sin 2x+\cos 2x}{3x^2}$; 32) $-\frac{4(1+\ln x)}{x^3}$;

33) $3\cos^2 x-2(3x+5)\cos x\sin x$; 35) $5(5x+7)^2(3(\ln 5x+7)+1)$.

Б 4) $\frac{5}{8}\left(\frac{x}{2}-1\right)^{\frac{1}{4}}$; 7) $4x\cos 2x^2$; 9) $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{3-x}{x+2}}\frac{1}{(3-x)^2}$;

11) $36\sin^3(4x+5)\cos(4x+5)$; 12) $\frac{e^{(2x+3)^2}(88x^2+76x-75)}{(11x-7)^2}$.

В 1) $\frac{12x^{\frac{3}{2}}-1}{4\sqrt{3x^3-x^{\frac{3}{2}}}}$; 3) $\frac{5}{6}2^{(x-1)^{\frac{5}{6}}}(x-1)^{-\frac{1}{6}}$; 7) $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$;

10) $4\left(\frac{1}{4x^5}+3x+7x^7\right)^3\left(-\frac{5}{4x^6}+3+49x^6\right)$; 11) $-\frac{(\ln 3x-1)^{-\frac{4}{3}}}{3x}$.

9.13. **А** 2) 1; 4) 2; 5) 1.

9.14. **Б** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) 1; 6) $\frac{10}{9}$.

9.15. **В** 1) $x<-1$; 2) $\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$; 3) $(-\infty;-5)\cup(1;+\infty)$;

4) $\pi(6n+1)<x<\pi(6n+5)$, $n\in\mathbf{Z}$.

■ Применение производной функции

А **9.16.** 2) а) $1,-\frac{1}{3}$; г) $2\pi n$; 3) а) $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{8}\right)$; б) $\left(\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) (0; 1). **9.17.** 10) $y=\frac{8}{9}x+\frac{14}{9}$.

Б **9.18.** 2) а) (3; 4); г) (1; 1); 3) б) (–1; 8); в) (2; –1). **9.19.** $y = 16x - 32$. **9.20.** (0; 0) — касательная совпадает с осью абсцисс, (4; –32) — касательная параллельна оси абсцисс. **9.21.** $y = 12x - 4$ и $y = -4x + 4$. **9.22.** $y = -\frac{1}{e}(x-2)$.

9.23. $y = 6x + 1 - \frac{\pi}{2}$. **9.24.** $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right)$. **9.25.** $y = -\frac{\sqrt{55}}{11}(x-3)$.

9.26. πn; $\frac{\pi}{8}(2n+1)$. **9.27.** (0; 0), (8; 0).

В **9.28.** 45°. **9.29.** $\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{3}}{15}$. **9.30.** $y = 2x - e$. **9.31.** $\frac{19\sqrt{26}}{5}$.

9.32. $\frac{3}{4}$. **9.33.** $\left(\frac{11}{2}; \frac{7}{2}\right)$. **9.34.** $y = 2x + 2$. **9.35.** 1, 53125.

9.36. $y = -8x - 4$. **9.37.** $y = -2x + 4$; $y = -6x + 12$.

9.38. $y = -\frac{1}{2}x + 1$. **9.39.** $y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{2}$.

■ Исследование функции с помощью производной

А **9.40.** 2) б) возрастает на $\left[-\sqrt{2}; 0\right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right)$; убывает на $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup \left[0; \sqrt{2}\right]$; г) $y' = 1 + \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow$ возрастает на $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Б **9.41.** 1) а) $(-\infty; 0)$, $[8; +\infty)$; г) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\ln 2\right]$, $\left[-\frac{1}{2}\ln 2; +\infty\right)$;

2) а) $a \geq 0$; б) $a \geq \frac{4}{3}$; г) $|a| \geq 1$.

В **9.42.** 1) б) $(-\infty; 0)$, $(0; e^{-1}]$, $[e^{-1}; 1)$, $(1; +\infty)$;
в) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$, $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 2) а) $a = 1$; б) $a = -11$, $b = 3{,}5$;
в) $a = 15$; $b = -2{,}5$; г) $a \leq -6$.

9.43. **А** 1) min при $x = \pm 1{,}5$, max при $x = 0$; 2) min при $x = 1$, max при $x = -1$; 4) min при $x = 2$, max при $x = \frac{2}{3}$;
5) нет экстремума; 6) min при $x = -1$, max при $x = 1$;
8) нет экстремума.

Б 1) max при $x = e$; 2) min при $x = -0{,}5$; 3) нет экстремума;
4) min при $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$; 6) нет экстремума; 7) max при $x = \frac{\pi}{8} + \pi n$,
min при $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}(2n+1)$; 8) min при $x = -\frac{1}{4}$.

В 2) нет экстремума; 3) min при $x = 0$; 4) max при $x = -\pi + 6\pi n$, min при $x = -\pi + 6\pi n$.

9.45. **А** 1) -5; $\frac{29}{4}$; 2) 3, 6; 3) –6, 21; 4) –9, –5; 5) –105, 3.

Б 1) $-\pi$; $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{7\pi}{6}$; 2) 0, 2; 3) $2-2\sqrt{2}; 3-2\sqrt{3}$; 4) 0, $\frac{1}{2}$.

В 1) $\frac{3}{4}\sqrt{2}$, $\frac{2}{3}\sqrt{3}$; 2) $-\frac{2\sqrt{e}}{3}$, e^3; 3) $-\ln 49$, 0; 4) $\frac{4}{27}$, $\ln(2e)\ln 2$.

А **9.46.** 1) ± 1; 2) 0; 3) 1; 4) $\pm\sqrt{4-\frac{\pi^2}{4}}$.

Б **9.47.** 1) 1; 2) ± 2; 3) 0, ± 1; 4) 2.

В **9.48.** 1) $y(-1)=1$; 2) невозможно доопределить; 3) $y(0)=2$; 4) $y(0)=2$.

Матричные тесты

■ Производная функции

9.49. **А**

Функция	Производная			
	$\frac{1}{x}$	$2x$	$-2\cos x \sin x$	$\cos(x+2)$
x^2+1		+		
$\sin(x+2)$				+
$\ln x$	+			
$\cos^2 x$			+	

Б

Функция	Производная			
	$\frac{2x}{x^2+1}$	$3x^2 \sin 2x^3$	$\cos x e^{\sin x}$	$1{,}5\sqrt{x}$
$\sin^2 x^3$		+		
$x\sqrt{x}$				+
$\log(x^2+1)$	+			
$e^{\sin x}$			+	

В

Функция	Производная			
	$5^{(\sin x+x)}\ln 5\times$ $\times(\cos x+1)$	$\cos x\log_2 x+$ $+\sin x\frac{1}{x\ln 2}$	$\frac{-\sin x}{\cos^2\cos x}$	$\frac{\frac{\sin^2 x}{x}-\ln x\sin 2x}{\sin^4 x}$
$\mathrm{tg}(\cos x)$			+	
$5^{(\sin x+x)}$	+			
$\frac{\ln x}{\sin^2 x}$				+
$\sin x\log_2 x$		+		

Первообразная функции

9.50. **А**

Функция	Первообразная			
	$0{,}5\ln x$	$3x$	$\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$	$-\cos x$
3		+		
$\sin x$				+
$\frac{1}{2x}$	+			
$\sqrt[3]{x}$			+	

Б

Функция	Первообразная			
	$x\sin x$	$\ln(\ln x)$	e^{5x}	$\sin^2 x$
$\frac{1}{x\ln x}$		+		
$\sin 2x$				+
$\sin x+x\cos x$	+			
$5e^{5x}$			+	

В

Функция	Первообразная			
	$\ln(\cos x)$	$\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x$	e^{x^5}	$\operatorname{tg} x^2$
$\frac{2x}{\cos^2 x^2}$				+
$-\operatorname{tg} x$	+			
$\sin^3 x$		+		
$5x^4 e^{x^5}$			+	

■ Касательная к графику функции

9.51. **А**

Функция	Угловой коэффициент касательной			
	0	2	1	$-\sin 1$
1	+			
$x + 1$			+	
x^2		+		
$\cos x$				+

Б

Функция	Угловой коэффициент касательной			
	$\frac{2}{\cos^2 2}$	2	4	$2e^2$
$\operatorname{tg} 2x$	+			
x^4			+	
e^{2x}				+
$\ln x^2$		+		

В

Функция	Угловой коэффициент касательной			
	$1{,}5\sin 2\cos 1$	$25\ln 25$	0	$-\sin 1\cos^{-2}(\cos 1)$
$\ln^2 x^3$			+	
5^{2x}		+		
$\sin^3 x$	+			
$\mathrm{tg}(\cos x)$				+

■ Наибольшее и наименьшее значения функции

9.52. **А**

Функция	Наибольшее и наименьшее значения			
	2; 2	0; 16	−6; 6	e^{-3}; e^3
$f(x) = 2$	+			
$f(x) = 2x$			+	
$f(x) = (x-1)^2$		+		
$f(x) = e^x$				+

Б

Функция	Наибольшее и наименьшее значения			
	−1; 1	0; 3	0; ln 7	−10; −1
$f(x) = \|x\|$		+		
$f(x) = -(x^2+1)$				+
$f(x) = \sin x$	+			
$f(x) = \ln(x+4)$			+	

В

Функция	Наибольшее и наименьшее значения			
	0; 5	0; 2	−3; 6	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$
$f(x) = \|4 - x^2\|$	+			

Функция	Наибольшее и наименьшее значения			
	0; 5	0; 2	–3; 6	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$
$f(x) = \lvert 2\sin x \rvert$		+		
$f(x) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{18}x\right)$				+
$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, x > -2, \\ 1, x \le -2 \end{cases}$			+	

Самостоятельные работы

Последовательность

А **9.53.** *Вариант 1.* 1) 31; 2) $a_7 = 14$, $S_7 = 35$; 3) $b_7 = 1$, $S_5 = 31$.

Вариант 2. 1) 110; 2) $a_6 = 9$, $S_6 = 24$; 3) $b_5 = \frac{2}{9}$, $S_5 = \frac{242}{9}$.

Б **9.54.** 1) 56; 2) $a_{10} = 45$, $S_8 = 184$; 3) $S_9 = 171$, $b_9 = 256$.

В **9.55.** 1) 55; 2) $a_{14} = 27$, $d = 2$; 3) $q = -0{,}5$; $S_{10} = \frac{341}{96}$ или $q = 1$; $S_{10} = 160$.

Предел функции

9.56. **А** *Вариант 1.* 1) 5; 2) 3; 3) 12.

Вариант 2. 1) 13; 2) –5; 3) –4.

Б 1) –2; 2) $+\infty$; 3) $\frac{2}{5}$.

В 1) 16; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1.

Производная функции

9.57. **А** *Вариант 1.* 1) $-2x\sin x^2$; 2) $\frac{1}{x}\mathrm{tg}\,x + \frac{\ln(4x)}{\cos^2 x}$;

3) $\frac{3x^2\cos(x^3) - 5^{x+1}\ln 5\cdot\sin(x^3)}{5^{2x+2}}$.

Вариант 2. 1) $(5x^4+1)\cos(x^5+x)$; 2) $\frac{16^x\ln 16}{\cos^2(16^x)}x^4 + \mathrm{tg}(16^x)4x^3$;

3) $\frac{4^{\ln x}}{\arcsin^2 x}\left(\ln 4\frac{\arcsin x}{x} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Б 1) $\frac{4x^3+1}{x^4+x}$; 2) $-5\left(8\sin(8x)\cos^5(x^2) + 2x\cos(8x)\cos^4(x^2)\sin(x^2)\right)$;

3) $\dfrac{-\dfrac{5x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}-\arccos\left(x^5\right)2\ln 5}{5^{2x}}$.

9.58. **А** *Вариант 1*. 1) max при $x = 1$ и min при $x = \dfrac{11}{3}$; 2) –40, –14; 3) $y = -14$.

Вариант 2. 1) max при $x = -1$ и min при $x = 3$; 2) –30, 2; 3) $y = -9x - 7$.

9.59. **Б** 1) $x_{1,2} = \pm 1$, $\lim\limits_{x\to\pm 1} y = \infty$; 2) max при $x = 0$; 3) $y = -\dfrac{4}{9}x + \dfrac{20}{9}$.

В 1) $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, $\lim\limits_{x\to\pm\sqrt{2}} y = \infty$; 2) max при $x = -1$, min при $x = 2$; 3) $y = e(5 - 4x)$.

Контрольные тесты с выбором ответа

■ Техника дифференцирования

А 9.60. в.
Б 9.61. а.
В 9.62. в.

■ Касательная к графику функции

А 9.63. а.
Б 9.64. в.

■ Монотонность и экстремумы

А 9.65. в.
Б 9.66. б.
В 9.67. а.

■ Наибольшее и наименьшее значения функции

А 9.68. в.
Б 9.69. б.
В 9.70. а.

Глава 10

Тренажеры

■ Интеграл и его применение

10.1. **А** 4) $\ln|x| - \dfrac{2}{x} - 3x + C$; 8) $\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \dfrac{3}{2}x^{\frac{4}{3}} - 9x^{\frac{1}{3}} + C$; 9) $\dfrac{1}{2}x^2 - \ln|x| + C$.

Б 1) $\frac{1}{12}(2x-1)^6+C$; 3) $\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{4x}+C$;

4) $\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{8}x^{-2}+C$; 5) $\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$; 6) $-2\cos\frac{x}{2}+C$;

8) $e^{2x-3}+C$; 9) $\frac{2}{9}(3x-4)^{\frac{3}{2}}+C$; 10) $2^{2x}\frac{1}{2\ln 2}+2^x\frac{2}{\ln 2}+x+C$.

В 2) $-\cos 3x+\frac{1}{2}\sin(2x-4)+C$; 3) $x^4+\frac{1}{2}x^2+e^{\sqrt{x}}+C$;

4) $\ln|x|-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sin^2 x+C$; 5) $\mathrm{arctg}(2x)$;

6) $\frac{3}{2}\sin 2x+\ln|x+4|+C$; 8) $0{,}5e^{2x+1}+0{,}5x+C$;

9) $\frac{1}{8}\left(3x-\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x\right)+C$; 10) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{2}e^{-2x-1}+C$.

■ Свойства первообразных

А **10.2.** 3) $-\frac{1}{3x^3}-\frac{71}{24}+C$; 6) $\frac{1}{3}\cos 3x+C$;

7) $-\frac{1}{8}x^4+x^2-\frac{1}{8}x+\frac{9}{4}+C$; 8) $\frac{1}{\sqrt{x}}+1+C$.

Б **10.3.** 6; 2) 4; 3) 2; 4) $-\frac{1}{4}$.

В **10.4.** 1) $-\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{3}x^2-4x^2+4x+\frac{401}{4}$; 3) $\frac{1}{2(1-2x)^2}+\frac{3}{2}$.

■ Формула Ньютона — Лейбница

10.5. **А** 1) $\frac{726}{5}$; 3) $-\frac{38}{3}$; 5) $\frac{31}{480}$; 8) $\frac{3}{5}$; 9) $-\sqrt{2}$; 10) $1+\frac{1}{8}\pi^2$.

Б 1) $\frac{1}{5}$; 4) 2; 5) $\frac{26}{3}$; 6) $-\frac{14}{3}$; 10) $\frac{5}{12}$.

В 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\sqrt{15}-2$; 4) $\log_3\frac{2}{\sqrt{e}}$; 5) $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$.

10.6. **Б** 1) $\frac{2}{3}-\frac{e}{2}$; 3) $\frac{4}{3}$; 6) $\frac{8}{3}$; 7) $2+\frac{\pi^3}{6}$; 8) $\ln 2-\frac{2}{3}$; 9) 12; 10) $2\sin 1-\frac{7}{12}$.

В 1) $\frac{\pi^3}{6}-2$; 2) $\frac{9}{2}$; 4) $\frac{4}{3}$; 5) $\frac{23}{2}$; 6) $\frac{4}{\pi}+\frac{2}{3}$; 7) 45; 8) 45.

■ Вычисление площади поверхности тела

10.7. **А** 1) $S_{\text{бок}}=\frac{7}{4}\sqrt{3}$, $S_{\text{полн}}=2\sqrt{3}$; 2) $S_{\text{бок}}=\pi\sqrt{17}$, $S_{\text{полн}}=\pi(\sqrt{17}+1)$;

3) 18π; 4) $S_{\text{бок}}=30\pi$, $S_{\text{полн}}=48\pi$; 5) $S_{\text{бок}}=24$, $S_{\text{полн}}=24+4\sqrt{3}$;

6) $S_{\text{бок}}=9\sqrt{2}\pi$, $S_{\text{полн}}=9\pi(\sqrt{2}+1)$; 7) $S_{\text{бок}}=16\pi$, $S_{\text{полн}}=24\pi$;

8) $S_{\text{бок}}=\sqrt{3}$, $S_{\text{полн}}=1+\sqrt{3}$.

Б 1) $S_{бок} = 40 + 8\sqrt{21}$, $S_{полн} = 40 + 8\sqrt{21} + 4\sqrt{3}$. 2) $S_{бок} = 12\sqrt{2}\pi$, $S_{полн} = \pi(12\sqrt{2} + 20)$; 3) $S_{бок} = 96$, $S_{полн} = 96 + 24\sqrt{3}$; 4) $S_{бок} = 50{,}4\pi$, $S_{полн} = 91{,}59\pi$; 5) $S_{бок} = 48\sqrt{11}$, $S_{полн} = 48\sqrt{11} + 12$.

В 1) $S_{бок} = 16\sqrt{3}$, $S_{полн} = 16\sqrt{3} + 20$; 2) $S_{бок} = 56\pi$, $S_{полн} = 104\pi$.

■ Вычисление объема

10.8. **А** 1) 45π; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{4\pi}{3}$; 4) 9π; 5) $S(x) = 2\sqrt{3}$; $V = 6\sqrt{3}$; 6) 9π; 7) $\frac{\sqrt{2}}{6}$; 8) 16π.

Б 1) $\frac{64\pi}{3}$; 2) $\frac{56\pi}{3}$; 3) 19,5.

В 1) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$; 2) $16\sqrt{3}$; 3) $\frac{250}{3}(\pi - 2)$; 4) $\frac{208}{3}\pi$.

Матричные тесты

■ Первообразные

10.9. **А**

Функция	Первообразная			
	$0{,}5x^2$	$\ln x$	$0{,}25x^4 + x$	$-\cos x$
x	+			
$x^3 + 1$			+	
$\sin x$				+
x^{-1}, $x > 0$		+		

Б

Функция	Первообразная			
	$0{,}5\sin(x^2) + \ln x$	e^x	$0{,}25x^4 + x$	$-\cos(2x)$
e^x		+		
$x^3 + 1$			+	
$2\sin(2x)$				+
$x\cos(x^2) + x^{-1}$	+			

В

Функция	Первообразная			
	$\operatorname{arctg}(x)$	$2\ln x$	$-0{,}25\cos(2x)$	$\sqrt[7]{x+4}$ $(x+4)$
$\sqrt[7]{x+4}$				+
$\dfrac{1}{1+x^2}$	+			
$\cos x\sin x$			+	
$2x^{-1}$		+		

■ Точки пересечения

10.10. **А**

Функция	0; –1	0; π	1	Точек пересечения нет
x^2+x	+			
$\ln x$			+	
$\sin x$		+		
x^{-1}				+

Б

Функция	0; π	0; 2	5	Точек пересечения нет
$-x^2+2x$		+		
$\ln(x-4)^4$			+	
$\operatorname{tg} x$	+			
e^x				+

В

Функция	0	–2; 2	–1	–1; 1
x^4-16		+		
$\ln(x^2)$				+
$\operatorname{arctg}(x+1)$			+	
$x^{0,5}$	+			

■ Формула Ньютона — Лейбница

10.11. **А**

Функция	Площадь			
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$y = 2x,\ a = 1$				+
$y = 3x^2,\ a = 1$				+
$y = \sqrt{x},\ a = 1$		+	+	
$y = \sin x,\ a = \frac{\pi}{3}$		+		

Б

Функция	Площадь			
	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	1	2
$y = x^2 + x,\ a = 1$		+		
$y = \sin 2x,\ a = \frac{\pi}{2}$			+	
$y = x^3 + 1,\ a = 1$				+
$y = \sqrt[3]{x-1},\ a = 2$	+			

В

Функция	Площадь			
	2π	3	1	9
$y = (0{,}25x + 1)^3,\ a = 0$			+	
$y = \sqrt{2x-1},\ a = 5$				+
$y = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right),\ a = \frac{\pi}{6}$		+		
$y = 4\cos^2 x,\ a = \frac{\pi}{2}$	+			

Самостоятельные работы

А 10.12. 1) $\frac{1}{3}x^3+\cos 2x+\ln|x|$; 2) $\frac{4}{3}$; 3) π.

Б 10.13. 1) $\frac{1}{3}x^3-e^{2x}+3\ln|x|$; 2) $\frac{8}{3}$; 3) $\frac{\pi}{3}$.

В 10.14. 1) $\frac{1}{3}e^{x^3}+\cos 2x+\ln|1+x|+\frac{1}{1+x}$; 2) $\frac{17}{6}$; 3) π.

Контрольные тесты с выбором ответа

■ Первообразные

10.15. **А** г.
Б в.
В б.

■ Площадь фигуры

10.16. **А** б.
Б б.
В г.

■ Объем тела

10.17. **А** б.
Б в.
В а.

Глава 11

Тренажеры

■ Классическое определение вероятности

А 11.1. $\frac{4}{9}$. 11.2. $\frac{26}{63}$. 11.3. а) $\frac{1}{90}$; б) $\frac{1}{81}$. 11.4. а) $\frac{5}{18}$; б) 0. 11.5. $\frac{1}{6}$. 11.6. $\frac{17}{100}$. 11.7. $\frac{1}{2}$. 11.8. $\frac{7}{22}$. 11.9. а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{3}{10}$; в) $\frac{9}{10}$. 11.10. $\frac{1}{5^4}$. 11.11. $\frac{1}{21}$. 11.12. $\frac{C_{10}^2}{C_{35}^2}$. 11.13. $\frac{99}{161}$. 11.14. $\frac{500}{3\,003}$. 11.15. $\frac{9}{20}$.

Б 11.16. а) 0,384; б) 0,096; в) 0,008. 11.17. $\frac{133}{180}$. 11.18. $\frac{1}{50}$. 11.19. $\frac{5}{9}$. 11.20. $\frac{4}{49}$. 11.21. а) 0; б) $\frac{1}{18}$. 11.22. $\frac{7}{18}$.

11.23. Вероятнее, что не будут. **11.24.** $\frac{5}{34}$. **11.25.** $\frac{87}{473}$.

11.26. $\frac{50}{259}$. **11.27.** 0,36. **11.28.** $\frac{C_{n-l}^{r}}{C_{n}^{r}}$.

В **11.29.** $\frac{2C_{18}^{8}}{C_{20}^{10}}$. **11.30.** $\frac{4}{35}$.

11.31. $\frac{2(n!)^2}{(2n)!}$; $\frac{(n+1)(n!)^2}{(2n)!}$. **11.32.** $\frac{1}{3}$. **11.33.** $\frac{4^3}{C_{52}^{3}}$.

11.34. $\frac{C_{10}^{6}C_{4}^{3}}{3^{10}}$.

■ Повторные испытания

А **11.35.** $\frac{3}{4}$. **11.36.** 0,6561. **11.37.** 0,79. **11.38.** $1-\frac{C_{10}^{3}}{C_{15}^{3}}$.

11.39. $P(A) = 0{,}125$; $P(B) = 0{,}375$.

Б **11.40.** 0,88. **11.41.** $\frac{91}{216}$.

В **11.42.** 0,459. **11.43.** а) 0,19; б) 0,71. **11.44.** $\frac{1}{C_{10}^{5}}$. **11.45.** 2.

11.46. а) 0,0243; б) 9,0729. **11.47.** а) $P(A) = 0{,}9375$; б) $P(B)=\frac{2}{3}$.

11.48. а) $P(A) = (p_1)^2 + (1 - p_1)(1 - p_2)$;

б) $P(B) = (p_2)^2 + (p_1)^2(1 - p_1) + (1 - p_2)(1 - p_1) + (1 - p_1)p_2$.

■ Геометрическая вероятность

А **11.49.** 0,5.

Б **11.50.** 0,5. **11.51.** $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{16}$. **11.52.** $\frac{2}{3}$.

В **11.53.** 0,31375.

Матричные тесты

■ Классическое определение вероятности

11.54. **А**

Событие	Вероятность				
	[0; 0,3)	[0,2; 0,4)	[0,4; 0,6)	[0,6; 0,8)	[0,8; 1]
Нет пустых нор					+
В первой норе три кролика		+			
Ровно одна нора пуста	+				

Окончание таблицы

Событие	Вероятность				
	[0; 0,3)	[0,2; 0,4)	[0,4; 0,6)	[0,6; 0,8)	[0,8; 1]
В одной норе четыре кролика, в остальных — поровну		+			
В одной норе два кролика, в остальных — поровну	+				

11.55.

Событие	Вероятность			
	$\frac{3}{16}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{32}$
Одна из ваз пустая				+
В одной из ваз один цветок	+			
В одной из ваз два цветка		+		
В обеих вазах четное число цветков			+	

11.56.

Сведения о коде	Вероятность			
	$\frac{1}{2000}$	$\frac{1}{5040}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{1000}$
Делится на 5	+			
Содержит только 2 и 3			+	
Начинается с 0				+
Не содержит одинаковых цифр		+		

Б

11.57.

Событие	Вероятность			
	$\frac{2}{11}$	$\frac{9}{55}$	$\frac{1}{55}$	$\frac{3}{11}$
Первая ваза пустая	+			

Окончание таблицы

Событие	Вероятность			
	$\frac{2}{11}$	$\frac{9}{55}$	$\frac{1}{55}$	$\frac{3}{11}$
В каждой вазе три цветка			+	
Хотя бы в одной вазе четыре цветка				+
Во всех вазах нечетное число цветков	+			

11.58.

Сведения о коде	Вероятность			
	$\frac{1}{84}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{70}$
Содержится цифра 5	+			
Только нечетные цифры		+		
Сумма цифр равна 29			+	
Из цифр можно составить арифметическую прогрессию				+

В

11.59.

Событие	Вероятность			
	$\frac{5}{22}$	$\frac{20}{33}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{35}{66}$
Только одна из ваз пустая	+			
В одной из ваз один цветок			+	
Хотя бы в одной из ваз два цветка				+
В одной из ваз три цветка			+	

■ Повторение испытаний

11.60. **А**

Событие	Вероятность			
	$\frac{1}{125}$	$\frac{256}{3125}$	$\frac{11529}{15625}$	$\frac{256}{15625}$
Ничьи только в первой и шестой партиях				+

Окончание таблицы

Событие	Вероятность			
	$\frac{1}{125}$	$\frac{256}{3125}$	$\frac{11\,529}{15\,625}$	$\frac{256}{15\,625}$
Хотя бы одна ничья в шести партиях			+	
Ровно три ничьи		+		
Три ничьи в первых трех партиях	+			

11.61. Б

Событие	Вероятность			
	$\frac{544}{625}$	$\frac{54}{625}$	$\frac{243}{3125}$	$\frac{486}{15\,625}$
Шахматисты сыграли ровно четыре партии		+		
Шахматисты сыграли не более четырех партий	+			
Шахматисты сыграли шесть партий			+	
Ничья в шестой партии				+

В

11.62.

Событие	Вероятность			
	$\frac{19}{144}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{5}{12}$
Сумма очков нечетна		+		
Два раза из четырех выпало одинаковое число очков			+	
Два раза из трех выпало одинаковое число очков				+
Произведение числа очков делится на 25	+			

Геометрическая вероятность

А

11.63.

Событие	Вероятность			
	1	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{2}{3}$
$x = y$			+	
$x \le y$		+		
$x^2 + y \le 4$	+			
$\begin{cases} x \ge 1; \\ y \ge 1 \end{cases}$				+

Б

11.64.

Событие	Вероятность			
	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0
$\lvert x\rvert \ge 1$	+			
$y \le 2 - x^2$		+		
$y = 4$				+
$y \ge 2\lvert x\rvert$			+	

В

11.65.

Событие	Вероятность			
	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$1-\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\lvert x\rvert \ge \frac{\pi}{6}$	+			
$x^2 + y^2 \le 1$		+		
$y \le \frac{1}{2}\cos 2x$				+
$y \ge \cos^2 x$			+	

Самостоятельные работы

■ Вычисление вероятности

А **11.66.** *Вариант 1.* 1) 0,005. 2) $\frac{1}{128}$. *Вариант 2.* 1) $\frac{1}{900}$; 2) $\frac{1}{3}$.

Б **11.67.** *Вариант 2.* 1) $\frac{1}{81}$; 2) $\frac{4}{9}$.

В **11.68.** *Вариант 1.* 1) а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{6}$; 2) а) $\frac{2}{9}$; б) $\frac{4}{27}$.

Вариант 2. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{24}$; 2) а) $\frac{2}{9}$; б) $\frac{10}{81}$.

■ Геометрическая вероятность

А **11.69.** *Вариант 1.* $\frac{2}{3}$. *Вариант 2.* $1-\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$.

Б **11.70.** *Вариант 1.* $\frac{1}{3}$. *Вариант 2.* $\frac{2}{3}$.

В **11.71.** *Вариант 1.* $\frac{2}{3}$. *Вариант 2.* $\frac{2}{3}$.

Контрольные тесты с выбором ответа

А **11.72.** б. **11.73.** г.

Б **11.74.** в. **11.75.** б. **11.76.** б. **11.77.** в.

В **11.78.** в. **11.79.** а. **11.80.** а.

Глава 12

Тренажеры

■ Область определения

12.1. А 1) $(-\infty; -1)\cup(-1; 0)\cup(0; +\infty)$; 2) $[-3; 0]$; 3) $(-\infty; -2)\cup(-2; 1)$;

4) $\left(-2; \frac{5}{3}\right]$; 5) $[5; 7)\cup(-\infty; 0]$; 6) $(-\sqrt{5}; 0)\cup(0; \sqrt{5})$;

7) $(-1; 0)\cup(0; +\infty)$; 8) $(0; e)\cup(e; +\infty)$; 9) $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$;

10) $[e^2; +\infty]$; 11) $x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$ и $x \neq \frac{\pi}{4}(2n+1)$;

12) $x \neq (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ и $x \neq \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

Б 1) $x \neq \pm 1$ и $x \neq \pm 2$; 2) $[5; 7)$; 3) $(-\infty; -1]\cup\{1\}$; 4) $(-\infty; -1)\cup(-1; 0]$;

5) $(3; 5]\cup(5; +\infty)$; 6) $(-\infty; -2]\cup[2; 6)\cup(6; +\infty)$;

7) $(-\infty; -3]\cup[-2; 2]\cup[3; +\infty)$; 8) $[e^2; +\infty)\cup(0; e^{-2}]$;

9) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right]$; 10) $\left[-\frac{7\pi}{6}; 0\right)\cup\left(0; \frac{\pi}{6}\right]\cup\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$,

$n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$. 11) $\varnothing$; 12) $(e; +\infty)$.

В 1) $(2; 1{,}5\pi) \cup (1{,}5\pi; 2{,}5\pi) \cup (2{,}5\pi; 8]$; 2) $(-\infty; -2] \cup 0 \cup [2; +\infty)$;

3) $\left[e^{-1}; \pi\right) \cup (\pi; 2\pi) \cup \left(2\pi; e^2\right]$; 4) $\left[\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n\right]$;

5) $\left(e; e^e\right) \cup \left(e^e; +\infty\right)$; 6) $[10; +\infty)$; 7) $\left(-\infty; -\sqrt{1{,}5}\right) \cup \left(-\sqrt{1{,}5}; 0\right)$;

8) $[e; e^2]$; 9) $[1; 10]$; 10) $\begin{cases} -4 \le x \le 4, \\ x \neq -\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}; \end{cases}$ 11) 1.

■ Разложение на множители

12.2. **А** 6) –2; –1; 0; 2; 8) –2; –1; 1; 9) $\left[-\sqrt{2}; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right]$;

13) $(-3; 1) \cup (-\infty; -7)$; 14) $(-8; 0)$.

Б 1) $-1 \pm \sqrt{2}$; $1 \pm \sqrt{2}$; 2) –3; –1; ±2; 3) –1; 2; 4) 1; 2; 3;

5) $-2; \pm\frac{1}{2}; 1$; 6) 2; 3; 7) 2–2; 1; 1,5; 8) –2; 1;

9) $\left(-\infty; 2\sqrt{2}\right) \cup \left(2 + 2\sqrt{3}; +\infty\right)$;

10) $\left(-2; 2 - 2\sqrt{2}\right] \cup (0; 2) \cup \left[2 + 2\sqrt{2}; +\infty\right)$; 11) $(-2; -1) \cup (-1; 5]$.

В 1) $-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}; 3$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $1 \pm \sqrt{5}$; 4) $-3 \pm \sqrt{3}; \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$;

5) $-\frac{2}{3}; 1; -\frac{1}{12}\left(1 \pm \sqrt{97}\right)$; 6) $\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$. 7) $x = -1$, $1 \le x \le 2$;

8) $(-5; -2]$, $(-1; 3)$, $(3; 5]$; 9) $(-3; 2]$; 10) –1; 1; 11) $\varnothing$;

12) $(-\infty; \ln 2) \cup (1; \ln 3]$.

■ Замена переменной

12.3. **А** 1) 1, –5, $-1 \pm \sqrt{6}$; 2) ±2, $\pm\sqrt[4]{1{,}5}$; 3) 1, $-\sqrt[3]{6}$; 4) 2, $\log_2 6$; 5) 2;

6) –2, 3; 7) $\frac{\sqrt{2}}{4}$, 2; 8) ±7; 9) $x = 1$; $-\frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{5}\right)$;

10) $-1 \pm \sqrt{2}; -1 \pm \sqrt{5}$.

Б 1) –4; –3; 2) 5; 3) –2 и 6; 4) –7; 2; 5) –4 и 2; 7) $2^{-\frac{2}{3}}$; 8; 8) –8; 4;

9) –1 и 0; 10) 3; $\frac{3}{\log_2 6}$.

В 1) –5; –3; 2) $3 \pm \sqrt{21}$, –2, 6; 3) 1, $-\frac{1}{8}\left(11 \pm \sqrt{57}\right)$; 4) $\log_{1,5} 2$;

5) 3; $1 + 2^{-1,25}$; 6) 0; 7) –1; $-1 \pm \sqrt{2}$; 8) $\varnothing$.

■ Решение уравнений

12.4. **А** 9) 0; –2; $-1 \pm \sqrt{16{,}5}$.

Б 1) 1; 3; 2) 1, –3; 3) $\frac{1}{2}$, 2; 4) 0; 5) 0; –2; 6) $-1;\frac{1}{3}$; 3; 7) –1; 3;
8) $-\frac{1}{3},-\frac{1}{2}$,1; 9) –1, 12; 10) $\frac{1}{4}$, 2.

В 1) 2; 0,5; $\frac{-11\pm\sqrt{105}}{4}$; 2) 7; $\frac{1}{7}$; 3) –4; 2; 3; 4) 0, 1;
5) $\frac{1}{2}$, 2, $2\pm\sqrt{3}$; 6) $\varnothing$; 7) –1,9, $\frac{1}{2}\left(5\pm\sqrt{61}\right)$; 8) 0.

12.5. **А** 2) 3; 3) –3; 2; 4) –5; ±2; 5) 4; 6) 1; 7) 1; 8) 4; 9) 4; 10) $\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$;
11) 3; 13) 2; 14) ±4; 15) –4, 2.

Б 2) –7, 2; 3) $\frac{5}{3}$; 4) $-\frac{4}{3}$; 5) 1, 3; 6) 14; 7) $-\frac{1}{3}$, 1; 8) 0,25.

В 1) 2; 2) 2; 3) $-\frac{8}{9}$, 3; 4) $x = 1$; 1,5; 2; 5) 4; 6) 1; 7) $\frac{22}{27}$; 8) –5; 0; 9) 2.

12.6. **А** 2) $\pm\sqrt{3}$; 3) –4, 3; 5) $\pm\sqrt{2};\pm 1$; 7) $\log_3 5$; 9) ±1; 11) 1; 12) $-\frac{1}{2}$;
13) 0; 9; 14) $x=\sqrt{3}$,27; 15) $x = 100$; $\frac{1}{10\sqrt[3]{100}}$.

Б 1) –2; 4; 2) –2; 3) 8; $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$; 4) 0,1;$10^{\sqrt{2}}$; 5) 1; 6) 0,1; 0,01;
7) 0,1; 0,01; 10; 100; 8) $10^{\pm\sqrt{3}}$.

В 1) 3; 2) $\frac{1}{625}$; 5; 3) 1, 2; 4) ±2; 5) 3, $\log_5 3 + 4$; 6) 3, 81; 7) 10;
8) 2; $-\log_5 4$; 9) 2; 10) 2.

12.7. **А** 1) –360°; 3) 22,5°; 5) 90°; 6) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$;
7) $\pi n;\ \pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 8) $(-1)^n\arcsin\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$;
9) $\frac{\pi}{4}(2n+1);\ \ \pm\frac{1}{6}\pi+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 10) $\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$;
11) $\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 12) $\frac{\pi}{8}(2n+1),\ n\in\mathbf{Z}$; 14) $\pi(2n+1),\ n\in\mathbf{Z}$;
15) $\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \ (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 16) $\pi n, \frac{\pi(2n+1)}{4},\ n\in\mathbf{Z}$.

Б 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n; 2\pi n;\ n\in\mathbf{Z}$;
4) $\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}n,\ n\in\mathbf{Z}$; 5) $x=(-1)^n\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{4}n,\ n\in\mathbf{Z}$;
6) $\pm\frac{1}{3}\pi+\pi n;\ \ \frac{\pi}{8}(2n+1),\ n\in\mathbf{Z}$; 8) $-\frac{1}{8}\pi\pm\frac{3}{8}\pi+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$;
8) $\frac{\pi}{24}(4n-1),\ n\in\mathbf{Z}$; 9) $\pm\frac{2}{3}\pi+4\pi n,\ n\in\mathbf{N};\ \pi n,\ n\neq 4k,\ k\in\mathbf{N};\ n\in\mathbf{Z}$.

В 1) $\frac{\pi}{4}(2n+1);\ \ (-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}(2n+1);\ n\in\mathbf{Z}$;
3) $x=\frac{\pi}{2}n,\ \ x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; 4) $x=\frac{\pi}{2}n, x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$;

5) $\frac{\pi}{2}(2n+1); 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 7) $\frac{\pi n}{7}; \frac{\pi n}{5},\ n \in \mathbf{Z}$;
8) $\frac{\pi}{2}n,\ n \in \mathbf{Z}$; 9) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Решение неравенств

12.8. **А** 1) $[-3; 1,2) \cup [2,5; 3,5)$; 3) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right)$;
5) $(-\infty; -1] \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 7) $(-\infty; -2) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$;
9) $(-\infty; -3] \cup (-1; 0) \cup [2; +\infty)$.

Б 1) $(-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$; 3) $[4-\sqrt{11}; 1]$; 5) $x \in \left(\frac{2}{3}; 4\right)$;
7) $(-2; 0) \cup (1; 4)$; 9) $(-\infty; -2] \cup [-1; 1] \cup [2; +\infty)$;
10) $\left(-2, -\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right) \cup \left(-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), 1\right)$.

В 1) -1|; 2) $(2, 4)$; 3) $(-1, 1)$; 4) $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup (-1; 0) \cup \left(1; \sqrt{3}\right)$;
5) $[-4, 1]$; 6) $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$;
7) $(-\infty, -3) \cup \left[-2, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, 2]$; 8) $(-\infty; -4] \cup [-2; -1] \cup [1; +\infty)$;
9) $(-1, 2)$; 10) $(-2, 1)$.

12.9. **А** 2) $[-4; 5]$; 4) $[1; +\infty)$; 6) $\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}); +\infty\right)$; 8) $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 10) $[5, 86)$.

Б 1) $(-\infty; -127]$; 3) $\left(\frac{71}{16}; 6\right] \cup [12; +\infty)$; 4) $[12, +\infty)$;
5) $(-\infty; -3]$; $\left[0; \frac{16}{11}\right)$; 6) $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$; 7) $(4; 7)$; 8) $\left(-\sqrt{2}, 3\right)$;
9) $(-\infty; -6]$; 10) $\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 2\right)$.

В 1) $[2; 8]$; 2) $\left[[-6, -4+\sqrt{2}\right)$; 3) $(-\infty; -2] \cup (0; +\infty)$; 4) $\left[1, \frac{46}{19}\right)$;
5) $[-1; 1]$; 6) $\left(2, \frac{4}{3}\sqrt{3}\right]$; 7) $[3; 4)$; 8) $\left(2, \frac{4}{3}\sqrt{3}\right]$; 9) $\varnothing$; 10) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$.

12.10. **А** 1) $(-\infty; 0)$; 3) $(-\infty; 0]$; 5) $\left[-\frac{1}{\log_2 5-1}; \frac{1}{\log_2 5-1}\right]$; 6) $(-\infty, 0]$;
7) $[0; 1]$; 8) $(-1,1)$; 9) $(-\infty; 4,5)$; 10) $(-\infty, 1]$; 11) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}+3^{\log_2 3}\right)$;
12) $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$; 13) $(-\infty; 2)$; 14) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$; 15) $(5; 14)$;

16) $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, 2)$; 17) $\varnothing$; 18) $(2, +\infty)$; 19) $\left(\log_3 \frac{1+\sqrt{33}}{2}; 2\right)$;
20) $(-\log_3 4, -1) \cup (0, 1)$.

Б 1) $(-\infty; 4)$; 2) $(-3, -2)$; 3) $[10; +\infty)$; 4) $\left(-1, \frac{9}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{13}\right)$; 5) $(1; 10)$;
6) $(-\infty, +\infty)$; 7) $\left(3^{\frac{3}{4}} - 1; +\infty\right)$; 8) $(-\infty, 0)$; 9) $\left(0; \frac{1}{9}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 1\right]$; 10) $(0, 1)$.

В 1) $(-\infty; \log_{0,3} 3)$; 2) $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$; 3) $(-\infty; -1] \cup (0; +\infty)$;
4) $\left(\log_5 \frac{2}{5}, \log_5 \frac{4}{5}\right) \cup (\log_5 2, +\infty)$; 5) $[0{,}2, 5]$; 6) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$;
7) $(0; 1) \cup (16; +\infty)$; 8) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$; 9) $\left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; 1)$;
10) $(2, 3) \cup (5, +\infty)$.

12.11. **А** 1) $\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}n; \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}n\right)$; 3) $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$; 5) $\left[\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n\right)$;
7) $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$; 9) $\left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right)$;
11) $\left(-\frac{\pi}{12} + \pi n; \frac{5\pi}{12} + \pi n\right)$; 12) $\frac{\pi}{12} + 2n\pi < x < \frac{5\pi}{12} + 2n\pi, n \in \mathbf{Z}$;
13) $\left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right]$; $n \in \mathbf{Z}$.

Б 1) $\left(-\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}; \frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}\right) \cup \left(\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}; \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi m}{5}\right)$, $n, m \in \mathbf{Z}$; 3) $\varnothing$;
5) $\left(\frac{\pi n}{4}; \frac{\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{4}\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 7) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right] \cup \{\pi n\}$,
$n \in \mathbf{Z}$; 10) $\left[-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right] \cup \left\{\frac{\pi}{2} + \pi m\right\}$, $n \in \mathbf{Z}$.

В 1) $\left(\frac{\pi}{8}n; \frac{\pi}{48} + \frac{\pi}{8}n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 3) $\mathbf{R}$; 4) $\pi + 2\pi n$; $n \in \mathbf{Z}$;
5) $\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}n\right) n \in \mathbf{Z}$;
6) $\left(\pi n; \frac{\pi}{12} + \pi n\right] \cup \left[\frac{5\pi}{12} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$; 7) $\left\{\frac{\pi n}{2}\right\}$, $n \in \mathbf{Z}$;
8) $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi n; \pi n\right) \cup \left(\pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$;
9) $\left(2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3} + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$;
10) $\left(-\frac{\pi}{12} + \pi n; \frac{\pi}{12} + \pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{12} + \pi n; \frac{11\pi}{12} + \pi n\right)$;

11) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; -\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}+1\right)+\pi n\right)\cup\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n; \pi n\right)\cup$
$\cup\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right)+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$.

■ Решение систем уравнений

12.12. **А** 1) $(-1; -2)$, $(2; 1)$; 2) $(-5; -7)$, $(7; 5)$; 4) $(-3; -2)$, $(1; 2)$; 6) $(9; 4)$, $(4; 9)$; 7) $(-3; -2)$, $(2; 3)$; 8) $(-2; 3)$, $(2; -3)$, $(-18; -13)$, $(18; 13)$; 11) $(1; 2)$; 15) $\left(\frac{3\pi}{2}-2\pi n; \pi n\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}-2\pi n; \pm\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$.

Б 1) $(10; 4)$, $(4; 10)$; 2) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$, $\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$; 3) $(-3; 3^{-5})$, $(5; 27)$; 4) $x=1$; $y=0$; 10); 5) $(4, 1)$; 6) $(27, 4)$, $\left(\frac{1}{81}, -3\right)$; 8) $(-9, -4)$, $(-4, -9)$, $(4, 9)$, $(9, 4)$; 9) $\left(\frac{\pi}{4}(2n+1), \pm\frac{\pi}{3}+2kn\right)$; 10) $\left(\frac{\pi}{2}\mp 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+\pi n\right)$; 13) $a=-1$; 14) $(1; 0)$ при $a\neq 1$; $(t; 1-t)$, $t\in\mathbf{R}$, при $a=1$.

В 1) $(1, -2)$, $(-2, 1)$, $(1, 1)$; 2) $(4; \pm 3)$; 3) $(\pm 3, \pm 1)$; 4) $\varnothing$; 5) $(1; 1)$, $(4; 2)$; 6) $(3; 9)$, $(9; 3)$; 7) $(4; 4)$; 8) $x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\pi(m+n)$; $y=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi m$, $n, m\in\mathbf{Z}$; 9) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi\left(\frac{n}{2}-m\right), -\frac{\pi}{4}+\pi\left(\frac{n}{2}+m\right)\right)$; 10) $x=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}-1; y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}-1; z=\pm\sqrt{6}-1$.

Матричные тесты

■ Равносильные уравнения

12.13. **А**

Уравнение	$(x^2-6)^2=x^2$	$\sqrt{x^2-6}=\sqrt{-x}$	$(x-1)(x^2-6)=(1-x)x$	$(x-2)(x^2-6)=-x(x-2)$	$\frac{x^2+6}{x+3}=-\frac{x}{x+3}$
$x^2-6=-x$				+	
$(x^2+x-6)(x^2-x-6)=0$	+				
$x+3=0$		+			
$x-2=0$					

Уравнение	$(x^2-6)^2 = x^2$	$\sqrt{x^2-6} = \sqrt{-x}$	$(x-1)(x^2-6) = (1-x)x$	$(x-2)(x^2-6) = -x(x-2)$	$\frac{x^2+6}{x+3} = -\frac{x}{x+3}$
$(x-1)(x-2)(x+3) = 0$			+		

Б

12.14.

Уравнение	$(x-1)(x-3)=0$	$(x-1)(x^2-9)=0$	$\sqrt{x-1}\,(x-3)=0$	$(x-1)\sqrt{x^2-9}=0$	$(x-1)\sqrt{9-x^2}=0$
$\sqrt{x-1}\,(x^2-9)=0$			+		
$\sqrt{(x-1)^2}\,(x^2-9)=0$					+
$\ln x(x^2-9)=0$	+				
$(\ln(x^2-8))(x-1)=0$					
$\sin(x-1)\sqrt{\frac{3-x}{x}}=0$			+		

В

12.15.

Уравнение	$(2-x)(x^2-16)=0$	$(2-x)(x+4)=0$	$\sqrt{-x+2}\times\sqrt{x^2-16}=0$	$\sqrt{x-2}\,(x+4)=0$	$\sqrt{x-2}\,(x^2-16)=0$
$\sqrt{2-x}\,(x^2-16)=0$					
$\sqrt{(x-2)^2}\,(16-x^2)=0$	+				

Окончание таблицы

Уравнение	$(2-x)(x^2-16)=0$	$(2-x)(x+4)=0$	$\sqrt{-x+2}\times$ $\times\sqrt{x^2-16}=0$	$\sqrt{x-2}\,(x+4)=0$	$\sqrt{x-2}\,(x^2-16)=0$
$\ln(3-x)\sqrt{x^2-16}=0$		+	+		
$\frac{x-2}{2+4}\cdot\left(e^{x^2-16}-1\right)=0$					+
$\frac{\operatorname{tg}(2-x)}{\sqrt{x}\sqrt{3-x}}=0$				+	

■ Равносильные неравенства

12.16. А

Неравенство	$\frac{1}{2x-1}\le 0$	$6x-3<0$	$-4x+2<0$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}<\frac{1}{3}$	$\ln(2x)<0$
$2x-1<0$	+	+			
$1-2x<0$			+	+	
$\frac{(2x-1)^2}{2x-1}\le 0$	+	+			
$\sqrt{x}\cdot(2x-1)<0$					+
$\frac{1}{\lg(4x-1)}\ge 0$			+	+	

Б

Неравенство	$\sin 2x+\cos 2x\le$ $\le\sqrt{2}$	$\frac{x-1}{x+3}\ge 0$	$\frac{x-2}{x^2-2x+2}\ge 0$	$\frac{(x-1)(x+2)^2}{\sqrt{x+3}}\ge 0$	$2\sin x-\cos x<$ <-3
$\frac{(x-1)(x-2)^2}{x+3}\ge 0$		+			

Окончание таблицы

Неравенство	$\sin 2x + \cos 2x \le \le \sqrt{2}$	$\frac{x-1}{x+3} \ge 0$	$\frac{x-2}{x^2-2x+2} \ge 0$	$\frac{(x-1)(x+2)^2}{\sqrt{x+3}} \ge 0$	$2\sin x - \cos x < < -3$
$\sqrt{x-2}\,\frac{x-1}{x+3} \ge 0$			+		
$\sqrt{x+3}(1-x) < 0$					
$x^2 - x + 3 < 2$					+
$x^2 - 2x + 2 > 0$	+				

В

Неравенство	$\sqrt{x}(x-1)(x-2) > 0$	$\log_2(x-1) \le 1$	$(2^{3+x}-1) \times (x+2)(x-1) \le 0$	$\frac{x+2}{x-1} \le 0$
$\frac{(x+2)(x-3)}{\sqrt{x-1}} \le 0$		+		
$\sqrt[3]{x-1} < x-1$	+			
$\frac{(x+2)(x+3)}{x-1} < 0$			+	
$\frac{\sqrt{x+2}(x+3)}{x-1} \le 0$				

■ Число корней уравнения

12.17. А

Функция $f(x)$	Функция $g(x)$				
	$g(x) = \frac{1}{2}x$	$g(x) = 4 - x$	$g(x) = x + 5$	$g(x) = 2$	$g(x) = -3 - x^2$
$f(x) = x$	+	+		+	
$f(x) = x^2 - 3$					

Окончание таблицы

Функция $f(x)$	Функция $g(x)$				
	$g(x)=\frac{1}{2}x$	$g(x)=4-x$	$g(x)=x+5$	$g(x)=2$	$g(x)=-3-x^2$
$f(x)=x^3$		+	+	+	+
$f(x)=e^x$		+		+	
$f(x)=\log_{\frac{1}{10}} x$	+		+	+	

Б

Функция $f(x)$	Функция $g(x)$				
	$g(x)=2-3x$	$g(x)=2-x$	$g(x)=x+3$	$g(x)=1-x^2$	$g(x)=4$
$f(x)=x$	+	+			+
$f(x)=1+x^2$				+	
$f(x)=-x^3$		+	+	+	+
$f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$			+		+
$f(x)=\lg x$	+	+		+	+

В

Функция $f(x)$	Функция $g(x)$				
	$g(x)=$ $=(x-2)^2$	$g(x)=$ $=2-x$	$g(x)=$ $=x-1$	$g(x)=$ $=-(x-2)^2-1$	$g(x)=100$
$f(x)=\ln x$		+	+	+	+
$f(x)=e^x$	+	+		+	+
$f(x)=\sin x$		+	+		
$f(x)=(x+2)^2+100$	+				
$f(x)=\dfrac{1}{x-10}+100$				+	

■ Вид множества решений неравенства

12.18. **А**

Неравенство	Промежуток			Два луча		
	$[a; b]$	$(a; b)$	$[a; b)$ или $(a; b]$	$(-\infty; a] \cup$ $[b; +\infty)$	$(-\infty; a) \cup$ $(b; +\infty)$	$(-\infty; a] \cup (b; +\infty)$ или $(-\infty; a) \cup [b; +\infty)$
$\dfrac{x+3}{x-4} < 0$		+				
$x^2 - 4x + 3 \geq 0$				+		
$\dfrac{2-x}{x+5} < 0$		+				
$\dfrac{x+6}{7-x} \geq 0$			+			
$\dfrac{x-5}{x+3} \geq 0$						+
$1 - x^2 \geq 0$	+					

Б

Неравенство	Промежуток			Два луча		
	$[a; b]$	$(a; b)$	$[a; b)$ или $(a; b]$	$(-\infty; a]$ $\cup [b; +\infty)$	$(-\infty; a)$ $\cup (b; +\infty)$	$(-\infty; a] \cup (b; +\infty)$ или $(-\infty; a) \cup [b; +\infty)$
$\dfrac{10-x}{5+x} \geq 0$			+			
$5 - x^2 \geq 0$	+					
$-2x^2 + 3x - 2 \leq 0$		+				
$\dfrac{1}{x^2-4} \leq 0$		+				
$\dfrac{2x+3}{2-x} < 0$					+	
$\dfrac{x+4}{2x-3} \geq 0$						+

В

Неравенство	Промежуток				
	$(-\infty;\ a)$	$(-\infty;\ a]$	$(a;\ +\infty)$	$[a;\ +\infty)$	$(a;\ b)$
$\log_{\frac{1}{5}} x < 5$			+		
$23 - x \geq 2$		+			
$\dfrac{1}{\sqrt{2+x}} \leq 3$				+	
$0 \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{5-x} < 1$	+				
$\ln(2 - x) < 5$			+		

■ План решения уравнения

12.19. **А**

Уравнение	Шаги решения			
	1)	2)	3)	4)
$\log_3 x = 4 - x$			+	
$(x - 1) + \sqrt{x-1} = 2$	+			
$\sin^3 x + 3\sin x\cos x = 0$		+		
$\sqrt{x^2+2x+2} = x+5$				+

Б

Уравнение	Шаги решения			
	1)	2)	3)	4)
$\log_2 x = \sqrt{6-x} - 1$			+	
$\sqrt{x+\dfrac{1}{x}+1} = \dfrac{x^2+1}{x} - 2$	+			
$\sin^4 x - 1 = \cos^2 x$		+		
$\sin x - \cos x = \dfrac{1}{2}$	+			

В

Уравнение	Шаги решения			
	1)	2)	3)	4)
$\frac{1}{\sin x} = 1 - \operatorname{ctg} x$	+			
$\sqrt{2^x - 1} = \sqrt{1 + \log_{\frac{1}{2}} x}$			+	
$x^2 + x + 3 = 2\sqrt{(x-1)(x+2)}$	+			
$\sqrt{x^3 - 1} = \sqrt{x^2 + x + 1}$		+		

Самостоятельные работы

Иррациональные уравнения и неравенства

12.20. **А** 1) 1; $-\sqrt[3]{6}$; 2) 2.

Б 1) 6; −2; $3 \pm \sqrt{21}$; 2) 0; −1.

В 1) 2; $\frac{1}{2}$; 2) 1.

12.21. **А** $(-5; -3] \cup (1; +\infty)$.

Б $(-\infty; 2\sqrt{2}) \cup (2 + 2\sqrt{3}; +\infty)$.

В при $a = 1$ $x \neq 1$; при $0 \leq a < 1$ x — любое; при $a > 1$ $x < x_1$, $x > x_2$, где $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - a}}{a}$; при $a < 0$ $x_1 < x < x_2$.

Логарифмические и показательные уравнения и неравенства

12.22. **А** 1) 3; 2) 5; 3.

Б 1) 2; $-\log_5 4$; 2) $\left(\frac{1}{\sqrt{128}}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

В 1) 1; 4; 2) 0,04.

12.23. **А** $[1; +\infty)$.

Б $|x| > \sqrt{1000}$ и $|x| < \frac{1}{\sqrt{10}}$.

В $(-10; 1 - \sqrt{5}] \cup [1 + \sqrt{5}; +\infty)$.

■ **Тригонометрические уравнения**

12.24. **А** 1) $\frac{\pi}{6}(-1)^{n+1}+\pi n$; 2) $\frac{\pi}{10}(2n+1)$; 3) $\frac{\pi}{14}(2n+1)$; $\frac{\pi}{10}(4n+1)$.

Б 1) $\frac{1}{2}\left((-1)^n \arcsin\left(\sqrt{3}-1\right)+\pi n\right)$; 2) $\frac{\pi}{4}(4n+1)$; $\frac{\pi}{6}(-1)^{n+1}+\pi n$;

3) $\frac{\pi}{24}(2n+1)$; $\frac{\pi}{2}n$.

В 1) $\frac{\pi}{6}(-1)^{n+1}+\pi n$; 2) $x=\frac{\pi}{5}n$; $\pm\arccos\left(\pm\frac{\sqrt{9\pm\sqrt{17}}}{4}\right)+2\pi n$;

3) $\frac{\pi}{4}(4n+1)$; $\frac{1}{2}\left((-1)^n \arcsin\left(3-2\sqrt{2}\right)+\pi n\right)$.

Контрольные тесты с выбором ответа

■ **Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства**

12.25. **А** 1) в. 2) а.

Б 1) а. 2) а.

В 1) а. 2) в.

■ **Логарифмические и показательные уравнения и неравенства**

А **12.26.** в. **12.27.** б. **12.28.** а.

Б **12.29.** в. **12.30.** в.

В **12.31.** в. **12.32.** в. **12.33.** г.

■ **Тригонометрические уравнения**

12.34. **А** 1) в. 2) а. 3) а.

Б 1) г. 2) в. 3) б.

В 1) а. 2) в. 3) б.

Оглавление

Предисловие 4

Глава 1. Развитие понятия о числе 6
Тренажеры 6
Матричные тесты 13
Самостоятельные работы 16
Контрольные тесты с выбором ответа 20

Глава 2. Корни, степени, логарифмы 24
Тренажеры 24
Матричные тесты 33
Самостоятельные работы 40
Контрольные тесты с выбором ответа 43

Глава 3. Прямые и плоскости 51
Тренажеры 51
Матричные тесты 66
Самостоятельные работы 69
Контрольные тесты с выбором ответа 71

Глава 4. Комбинаторика 75
Тренажеры 75
Матричные тесты 88
Самостоятельные работы 92
Контрольные тесты с выбором ответа 95

Глава 5. Координаты и векторы 100
Тренажеры 100
Матричные тесты 108
Самостоятельные работы 114
Контрольные тесты с выбором ответа 117

Глава 6. Основы тригонометрии 122
Тренажеры 122
Матричные тесты 138
Самостоятельные работы 146
Контрольные тесты с выбором ответа 152

Глава 7. Функции и графики 159
Тренажеры 159
Матричные тесты 178
Самостоятельные работы 183
Контрольные тесты с выбором ответа 194

Глава 8. Многогранники и круглые тела 204
Тренажеры 204
Матричные тесты 219
Самостоятельные работы 224
Контрольные тесты с выбором ответа 226

Глава 9. Начала математического анализа 229
Тренажеры 229
Матричные тесты 243
Самостоятельные работы 247
Контрольные тесты с выбором ответа 250

Глава 10. Интеграл и его применение 253
Тренажеры 253
Матричные тесты 258
Самостоятельные работы 261
Контрольные тесты с выбором ответа 262

Глава 11. Теория вероятностей 265
Тренажеры 265
Матричные тесты 272
Самостоятельные работы 277
Контрольные тесты с выбором ответа 280

Глава 12. Уравнения и неравенства 283
Тренажеры 283

Матричные тесты 295
Самостоятельные работы 303
Контрольные тесты с выбором ответа 305

Ответы 310

Учебное издание

Башмаков Марк Иванович

Математика

Задачник

Учебное пособие

Редактор *Л.В.Честная*
Технический редактор *Н.И.Горбачева*
Компьютерная верстка: *Д.В.Федотов*
Корректор *Г.Н.Петрова*

Изд. № 105114042. Подписано в печать 04.04.2014. Формат 60 × 90/16.
Гарнитура «Школьная». Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 26,0.
Тираж 10 000 экз. Заказ № 8622

ООО «Издательский центр «Академия». www.academia-moscow.ru
129085, Москва, пр-т Мира, 101В, стр. 1.
Тел./факс: (495) 648-0507, 616-00-29.
Санитарно-эпидемиологическое заключение № РОСС RU. AE51. Н 16476 от 05.04.2013.

Отпечатано с электронных носителей издательства.
ОАО «Тверской полиграфический комбинат», 170024, г. Тверь, пр-т Ленина, 5.
Телефон: (4822) 44-52-03, 44-50-34. Телефон/факс: (4822) 44-42-15.
Home page — www.tverpk.ru Электронная почта (E-mail) — sales@tverpk.ru